A. 18. I. 29

9
18 L
29

G
5
54

G.VI.11.J

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

9.18 I. 29 White Richard

HEMISPHAERIVM DISSECTVM

OPVS GEOMETRICVM

In quo obiter tractatur

De Maximis Inſcriptibilibus, & Minimis Circumſcribentibus

RATIO etiam diſcutitur quare aliquæ Propoſitiones non admittant Solutionem per Media Plana vel Euclidis Elementa.

Cum

METHODO nouâ Geometricâ quâ ad Aequationem reducitur Propoſitio de Sectione Hemiſphærij in ratione datâ

Acceſsit APPENDIX de Inſcriptione in Sphæra Coni Scaleni, & de Superficie eius.

Demum

Cubatio cuiuſdam partis Cylindri diſſectæ Plano.

Authore

RICARDO ALBIO ANGLO,

ROMAE, Ex Typographia Manelphi Manelphij, 1648.

SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

Digitized by Google

AD LECTOREM.

VNDE tibi tam impolitus liber, ſi quæris amice Lector, eum ſcito in graueſcentis in authore, & per ætatem, & per infortunia animi Typum gerere: qui iam ſolidæ veritatis appetens lenocinia, blandioris adoleſcentiæ, & ſcholæ cultum negligit. Cur in hanc Palæſtram ſerus prodiuerim ſic accipe. Sextus poſt decimum huius ſæculi, me, vrgebat annus, illud toto decennio anteuertentem, antequam, quid ſcientia foret, guſtare datum fuiſſet; ſeueritate legum patriarum, Catholicis, publicas ſcholas interdicente. Cùm quid vltra furibundos Oceani, quibus cingit Britanniam, aggeres ageretur viſendi libido me inceſſit, tranſitaque Gallia perduxit in Hetruſcam Curiam, & pacis belliquè vigentem artibus Florentinam Ciuitatem. Dux itineris comeſque erat Iacobus Claytonus, & adminiſtrandæ itinerationis & ſcienciarum peritia noſtratibus Europæ luſtratoribus perquam notus, & ingenij facilitate, morumque ſuauitate, nulli, cui ſemel notus fuerat, obliuiſcendus. Is me ad Ariſtotelicas inſtitutiones, primo ſcientiæ

honore cæteris eo tempore prælatas, applicuit. Organum ipſius peruolutaui, ad Phyſica Acroamata ſtudium collocaui; directricem vitæ Scientiam ardenter perſecutus ſum. Quid multa? Concluſiones ambiguas, multis vltro citroque contentionibus differtas, inueni. Ipſas quin etiam Definitiones, & Principia, inter pugnantium interpretum explicationes & diſtinctiones, male ſedentia & vacillantia, comperi. Mihi proinde puræ Tenebræ viſæ ſunt illæ diſciplinæ. Magna interea fama inter doctos vehebatur Sublimis ille Galilæi Galilæus, calcatis infernè vndis, penetrato ſupernè cælo, egregijs in tellure machinis, fraternorum trium Regnorum Victor, tanta gloria, vt ſtudioſi nullius oculos ad ſe non traheret, atque etiam meos. Verùm imparem me tantæ luci, fouit tantiſper Diſcipulus ipſius D. Benedictus a Caſtellis, ſub Vrbano poſtmodum Eccleſiæ Principe, eiuſdem Mathematicis præfectus diſciplinis, & machinationibus. Sub quo Magiſtro, Euclidem aggreſſus, viam regiam inſtitiſſe viſus ſum, firmitatis & euidentiæ plenam, in qua nullus trepidationi, vel ambiguitati, reliquus eſſet locus. Vt non mirarer magna illa ingenia, Bonauenturam Cauallerium Bononienſis

Matheſeos præfectum, & Andream Arrighettum præclariſsimis in Hetruſca Curia muneribus præpoſitum, & iiſdem tunc operis addictos, & eodem vſos eſſe magiſtro. Sed vix alterum annum tanta licuit fœlicitate potiri. Ad patrias curas & rem familiarem, & longa beatioris illius vitæ obliuia, me traxit neceſsitas; donec poſt plures annos, reuiſens me ex longa peregrinatione Frater meus Thomas, iiſdem diſciplinis delectatus, ad Archimedis libros eos potiſsime quos de Sphæra & Cylindro ſcripſit, recolendos, impulit. Aſt importunus rerum Britannicarum motus, qui me procul patria domo extorrem in Hetruriā & Romā vſquè egerunt, properè has cogitationes reſciderunt; Sic tamen, vt eaſdem, Romæ rurſus obuius idem Frater, denuò ſuſcitaret, perficeretque, vt meditatas de Cylindro & Sphæra propoſitiones etſi per vicennalem propemodum deſuetudinem, tardus, in lucem dare, ſuſciperem. Neque Roma diſcedens deſtitit per amicos, eandem mihi neceſsitatem impingere, maximè per Clariſsimum virum, eumque & in his diſciplinis doctiſsimum, & eas colentium fidiſsimum patronum (quem honoris cauſa nomino) Michaelem Angelum Riccium; cuius ingenij monumen-

ta tam mirabitur poſteritas, quam indolis deli-cias colit amicorum frequentia.

Sic habes benigne Lector opuſculum hoc, cuius, vt ſitum & barbariem excuſari precor, ſic veram nouitatem & demonſtrationum firmitatem, te delectaturam ſpero. Præter propoſitum enim eſt, ſi quid maioris momẽti ab alio vulgatum huc intexuerim. Elementorum Euclidis quæ ſuppoſui loca, velut nota ſatis Lectoribus non ſignaui, Archimedeas & Apollonianas propoſitiones, plerumque, vbi quærendæ ſint adnotaui: Qualecunque eſt tandem opus, in ſinum tuæ beneuolentiæ aſſume: Etſi breue, prolixis tamen & tenebricoſis in Phyſicas ſciẽtias commentarijs non poſthabendum, poſtquam hinc, modicum non magno tempore, illinc, veritatis parum poſt ingentem eis laborem, demeſſurus. Quorum tamen authores, etiam in has ſeueriſsimas diſciplinas, cenſuræ ſtylum ſtringere aliquando (neſcio qua fiducia) non verentur; obliti ſibi omnia in incerto eſſe, & modeſtiores certitudinem, plerumque, neque polliceri. Viuant in imperitia ſua & ignorantiam maiore voluminum vaſtitate ſemper onerent. Mihi tecum liceat, frugi lector, breui compendio puris veritatibus oblectari. Vale.

DEFI-

Digitized by Google

Imprimatur, ſi videbitur Reuerendiſs. P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

Alex. Victricius Epiſc. Alatr. Viceſg.

EX commiſſione Reuerendiſſimi Patris Vincentij Candidi Magiſtri S. Palatij legi præſentem librum cui titulus Hemiſphærium diſſectum Authore Richardo Albio nobili Anglo, cuius ſingulare acumen & ſubtilitatem ingenij, ſumma cum demonſtrandi perſpicuitate ſum admiratus.

Liber nihil continet contra fidem aut bonos mores, vtpote ab ipſo ſcriptus qui præilluſtri & antiquiſsimâ familia apud Anglos natus, patrimonij & fortunarum iacturam atque exilium a patria ob fidei Catholicæ Profeſsionem ea animi tranquillitate tulit vt nullæ nubes aduerſitatis offuſcauerint ſerenitatem illius mentis, quæ centrum ac omne bonum ſuum in cælo conſtituit & collocauit. Proinde Nobiliſſimi authoris digniſsimum opus ne dum voluptate candidatorum omnium Mathematicæ, ſed boni publici incremento typis dari poſſe cenſui. Romæ 16. Decemb. 1647.

P. Auguſtinus Conierius Monachus Benedictinus Anglus,

Imprimatur.

Fr. Hyacinthus Pandolphus Magiſter, & Socius Reuerendiſs. P. Fr. Vincentij Candidi Ordinis Prædicatorum Sac. Pal. Apoſt. Mag.

Digitized by Google



Digitized by Google

DEFINITIONES.

CONORVM, Cylindrorum, & Rhomborum, Definitiones, quoniam à multis traditæ, & ſatis cognitæ ſunt omnibus, qui in Geometricis verſantur, hic non traduntur.

Sectionum Conicarum Definitiones apud Apollonium in libris de Elementis Conicis quærantur.

Conoidum, & Sphæroidum apud Archimedem in libro de Conoidibus & Sphæroidibus.

Conus ſimpliciter, ſemper intelligitur de Cono recto, & baſis cuiuſcunque Coni eſt Circulus.

Conus Segmenti, eſt qui habet verticem in centro baſis Hemiſphærij, baſim verò Circulum factum ex ſectione plani, baſi Hemiſphærij, paralleli.

Conus ſectoris, eſt idem cum Cono Segmenti; dicitur autem Sectoris in relatione ad Sectorem, cuius pars ille eſt.

Conus Portionis, eſt qui habet eandem baſim cum Portione, & verticem in polo Hemiſphærij.

Conus Rectangulus. eſt qui cùm ſectus fuerit Plano per axem, in triangulo per ſectionem facto, habet angulum in vertice Rectum.

Segmentum, vocatur pars illa Hemiſphærij, quæ interiacet duobus planis parallelis: Et ſi vnum planorum fuerit baſis Hemiſphærij, tunc vocatur Segmentum ad baſim: Si verò neutrum fuerit baſis, ſed am-

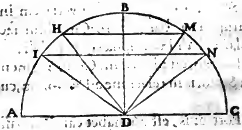
bo parallela baſi, vocetur Segmentum Intermedium.

Portio Hemiſphærij, eſt pars illa abſciſſa plano ad baſim parallelo, habens verticem eundem cum polo Hemiſphærij.

Sector Primus, eſt qui factus ex reuolutione Sectoris in Circulo, habet eundem axem cum Hemiſphærio.

Sector Secundus, eſt pars Hemiſphærij, quæ ex deductione Sectoris Primi relinquitur, habens eundem axem cum Hemiſphærio.

Vocatur etiam Sector Secundus, vel Sector Secundus Intermedius, pars illa maioris Sectoris Primi, quæ, ablato Sectore primo minore, relinquitur.



Vt autem hæc melius intelligantur, Deſcribatur Hemiſphærium ABC cuius centrum D, axis BD, & baſis circulus circa diametrum AC, cui ſint duo plana parallela ſecantia Hemiſphærium per IN & HM. Concipiantur iam omnia ſecta plano per axem, Vnde factus ſit Semicirculus ABC, cum duabus lineis parallelis diametro AC. Ductæ iam ſint ad centrum

rectæ ID, HD, MD, & ND, & ex reuolutione Sectoris HDM circa axem BD, intelligatur factus Sector Primus HDM, vel ex reuolutione Sectoris IDN circa eundem axem BD, factus Sector Primus IDN, Iam verò ſi ex Sectore IDN ſubtrahatur Sector Primus HDM, relinquetur Solidum quoddam excauatum, inter lineas (vel ſuperficies Conicas ex lineis ID, HD, MD, & ND reuolutis circa axem BD factas) comprehenſum, quod vocamus Sectorem Secundum Intermedium. Sector verò Secundus vocatur pars illa Hemiſphærij quæ relinquitur deducto Sectore Primo HDM, vel IDN; Scilicet quod continetur inter baſim AC & Superficiem Conicam factam ex reuolutione linearum ID, ND, vel HD MD. Segmentum, vel Segmentum ad baſim, eſt pars Hemiſphærij inter baſim, & Planum parallelum IN, vel HM. Segmentum Intermedium, eſt quod continetur inter Plana IN & HM. Portio verò pars illa quæ inter Polum B, & aliquod Planum parallelum baſi, putà HM, vel IN continetur.

Conus IDN dicitur Conus Segmenti AINC, & in relatione ad Sectorem IDNB, dicitur Conus Sectoris. Et ſi ductæ fuerint rectæ IB & NB, deſignantes Conum IBN, vocabitur ille Conus Portionis IBN.

Truncus Coni, eſt pars illa Coni quæ interiacet baſim & Planum baſi parallelum ſecans ipſum.

Conus dicitur inuersè poſitus Hemiſphærio, quando vertex eius eſt in centro baſis Hemiſphærij.

Conus dicitur Inſcriptus Cono, quando vertex inſcripti eſt in centro baſis circumſcripti, & baſis in-

ſcripti

ſcripti tangit circumſcribentem in circulo.

Similiter Conus Rectus in Sphærâ inſcriptus dicitur, quando vertex eius eſt in Polo, baſis vero ad axim recta tangit ſuperficiem Sphæræ in Circulo.

Conus Rectus inſcriptus Hemiſphærio dicitur, quãdo Vertex eius eſt in centro baſis Hemiſphærij, & baſis Coni tangit ſuperficiem in circulo parallelo baſi Hemiſphærij.

Conus dicitur circumſcribere Sphæram, quando Sphæra inſcripta tangit illum in centro baſis ipſius & in Circulo,

Conus dicitur circumſcribere Hemiſphærium, quando baſis Coni & Hemiſphærij habent idem Centrum, & tangunt inuicem in circulo.

Similiter etiam Coni dicũtur inſcripti vel circumſcripti Conoidibus vel Sphæroidibus, vel quibuſcunque Portionibus vel Sphærarum vel Sphæroidum, ſicut in præcedentibus iam diximus de Sphærâ, & Hemiſphærio.

Latus Coni, vocatur quæcunque recta linea quæ à vertice ad aliquod punctum in peripheriâ baſis ipſius ducitur.

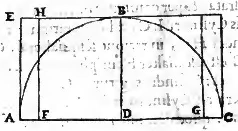
Figura genetrix dicitur, de quâcunque figurâ planâ, ex cuius reuolutione circa axem aliquem manentem fiat aliquod Solidum. Exempli gratiâ, Figura genetrix Coni eſt Triangulum Rectangulum: Conoidis Parabolici eſt Semiparabola recta, & ſic de cœteris.

HE-

HEMISPHAERIVM DISSECTVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Si quadratum diametri baſis Hemiſphærij ad quadratum diametri baſis Cylindri ſit in ratione ſeſquialtera, & ſit Cylindrus eiuſdem cum Hemiſphærio altitudinis; erit Cylindrus Hemiſphærio æqualis.



SIT Hemiſphærium A B C, in quo centrum baſis D, axis D B, & ſuper baſi A C, & altitudine Hemiſphærij D B conſtituatur Cylindrus E C; ſumatur iam in radio A D punctum F, vt ſit quadratum A D ad quadratum F D in ratione ſeſquialterâ, hoc eſt ſicut 3 ad 2, & ſuper circulo ex radio F D,



(cuius diameter linea F G) & altitudine B D, conſtituatur Cylindrus H G. Dico hunc Cylindrum æqualem eſſe Hemiſphærio A B C.

11. duodecimi. Quoniam enim Cylindri, quorum eadem eſt altitudo ſunt in ratione baſium; baſes autem, cum ſint circuli, ſe habeant ad inuicem quemadmodum à diametris quadrata, & per conſtructionem, quadratum radij A D baſis Cylindri E C, ad quadratum F D radij baſis Cylindri H G, in ratione ſeſquialterâ, Cylindrus vero E C eſt ſeſquialter Hemiphærij vti demonſtrauit Archimedes: Cylindrus igitur H G eſt in ratione ſubſeſquialtera ad Cylindrum E C, & ideo æqualis Hemiſphærio. quod demonſtrandum erat.

2. duodecimi.

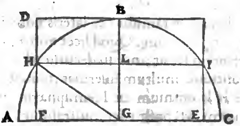
Lib. 1. de ſphæra, & Cylindro prop. 32.

PROPOSITIO II.

Si circa axem Hemiſphærij conſtituatur Cylindrus æqualis Hemiſphærio, & eiuſdem altitudinis, & per interſectionem vtriuſque ducatur planum ſecans

axem

axem: quadratum totius axis, ad quadratum partis interceptæ inter planum ſecans & baſim, erit in ratione tripla.



SIt enim Cylindrus D E æqualis hemiſphærio ABC, conſtitutus circa eundem axem BG, & eiuſdem altitudinis, & per interſectionem eorūdem ducatur planum H I, baſi A C parallelum, interſecans axem B G in puncto L: Dico quadratum axis B G, eſſe triplum quadrati partis interceptæ L G: Ducatur demonſtrationis gratia à puncto interſectionis H ad centrum G linea H G, quæ cum ſit æqualis A G radio baſis hemiſphærij, erit quadratum H G ad quadratum F G ſicut 3 ad 2, ſed quadratum H G, æquale eſt duobus quadratis ex H F, & F G. Quadratum igitur H G cum ſit 3 & quadratum F G 2, neceſſe eſt quadratum H F eſſe 1, & rationem quadrati H G ad quadratum H F ſicut 3 ad 1. Cum autem B G & H G ſint æquales, ſicut etiam L G & H F, in eâdem ratione erit axis B G, ad L G partem interceptam: Quadratum igitur axis eſt ad quadratum partis interceptæ inter planum ſecans & baſim in ratione triplâ: quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Hic opportunum erit obſeruare quòd proportiones laterum trianguli G H F eædem ſint, quæ diametri ſphæræ, lateris pyramidis, & lateris cubi in eadem ſphæra inſcriptibilium. Quod licet non admodum ad rem præſentem faciat, nec in decurſu libri ad ſequentes propoſitiones multum inſeruiat; tamen, quoniam Cylindri H E omnium in Hemiſphærio inſcriptibilium maximi, vti poſtea demonſtrabitur, baſis ex radio G F, altitudo vero ex axe G L (quæ dimidia ſunt latera Pyramidis & Cubi in eadem ſphæra inſcriptibilium, vt mox patebit) conſtitutæ ſunt; viſum eſt ea de re lectorem admonere; cum præſertim vtile poſſit eſſe ad multa id animaduertiſſe.

Laterum autem trianguli cum tribus dictis lineis ſimilitudo, ex eo quod modo inſinuatum eſt ſatis elucere poteſt; quia nimirum tres lineæ quæ triangulum illud componunt, horum laterum ſunt dimidia; ſphæræ quidem ſemidiameter G H, dimidium Pyramidis latus G F, ac demum lateris Cubi dimidium H F, quæ omnia breuiter oſtendo.

Ac primum quod G H ſit ſemidiameter ſphæræ manifeſtum eſt, cum axi Hemiſphærij B G æqualis ſit.

Deinde quod G F ſit dimidium lateris Pyramidis, inde probatur: quia diameter ſphæræ (vt demonſtrauit Euclides) eſt potentiâ ſeſquialtera lateris Pyramidis quæ ipſi poteſt inſcribi: oſtenſum autem eſt, ita ſe ha-

13. lib. 13.

1. huius.

bere

bere AC diametrum ſphæræ ad rectam FE: Erit igitur FE latus Pyramidis ei ſphæræ inſcriptibilis, atque adeo GF eius lateris dimidium.

Denique quod HF ſit dimidium lateris cubi, ſimili ratione concluditur. Cum enim in hac propoſitione probatum ſit, quod BG, ſeu quod idem eſt HG axis, ſeu ſemidiamiter Hemiſphærij ſit potentiâ tripla rectæ HF, quod ipſum demonſtrauit Euclides de ratione diametri ſphæræ ad latus cubi inſcriptibilis, erit HF dimidium lateris cubi: eadem enim eſt ratio dimidij ad dimidium, quæ totius ad totum. 15. lib. 13.

PROPOSITIO III.

Circulus, cuius radius eſt linea à vertice ſectoris ad marginem ſuperficiei eius ſphæricæ, eſt æqualis ſuperficiei ſphæricæ ipſius ſectoris.

DEmonſtratur ab Archimede libro primo de ſphęra & Cylindro propoſitione triceſimâ ſextâ, & triceſimâ ſeptimâ.

COROLLARIVM.

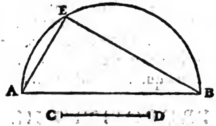
Vnde ſequitur, quod ſuperficies ſphæricæ ſunt inter ſe, ſicut quadrata linearum ſubtendentium à polo hemiſphærij vel ſectoris, ad marginem ſuperficiei ſphæricæ, vel radij circulorum æqualium ſuperficiei ſphæricæ.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO IV.

Quadratum lineæ minoris à quadrato maioris ſubtrahere.

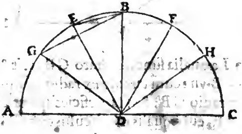


SIt data linea A B maior, & C D minor, & oporteat ex quadrato lineæ A B ſubtrahere quadratum lineæ C D; Super linea A B deſcribatur ſemicirculus A E B; in quo à puncto A applicetur linea A E æqualis datæ C D, & ducatur E B; dico quod E B eſt linea quæſita: Cum enim quadratum A B ſit æquale quadratis ex A E, & E B; ſi ſubducatur à quadrato A B quadratum ex E A, quod reliquum eſt æquale erit quadrato ex E B: eſt igitur E B linea quæſita.

PROPOSITIO V.

Superficies ſphærica ſectoris ſecũdi æqualis eſt circulo, facto à radio cuius quadratum vna cum quadrato radij circuli

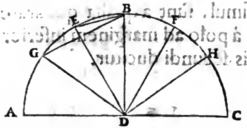
æqualis ſuperficiei ſphæricę ſectoris primi ſimul, ſunt æqualia quadrato lineæ quæ à polo ad marginem inferiorem ſectoris ſecundi ducitur.



SIt enim Hemiſphærium A B C, in quo ſit ſector primus E D F, ſector vero ſecundus G E D F H, axis B D, & à polo B ducantur lineæ B E, B G, ad margines ſectorum. 3. huius.

Cum igitur circulus factus à radio E B æqualis ſit ſuperficiei ſphæricæ ſectoris E D F, circulus etiam à radio B G, æqualis ſit ſuperficiei ſphæricæ ſectoris totius G D H, hoc eſt ſectoris primi E D F, & ſectoris ſecundi G E D F H: Circuli autem cum ſint in ratione quadratorum radiorum ſuorum, erit & ſuperficies ſphærica ſectoris E D F, ad ſuperficiem ſphæricam ſectoris G D H, ſicut quadratum lineæ E B ad quadratum lineæ G B: Subducatur igitur ex quadrato lineæ G B, quadratum E B & ſit linea I, cuius quadratum vna cum quadrato E B, ſimul ſumpta æqualia ſint quadrato G B: Quoniam igitur quadratum E B vna cum 4. huius.

qua-



quadrato I æqualia ſunt quadrato GB, erit & circulus ex radio EB vna cum circulo ex radio I ſimul æquales circulo ex radio GB; Sed ſuperficies ſphærica ſectoris primi EDF, cui æqualis eſt circulus ex radio EB, vna cum ſuperficie ſphærica ſectoris ſecundi conficiunt ſuperficiem ſphæricam ſectoris GDH, cui æqualis eſt circulus ex radio BG; Superficies igitur ſphærica ſectoris ſecundi GEDFH, æqualis eſt circulo ex radio I, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hinc infertur quod ſi ducatur linea AB, circulus factus à radio AB æqualis erit ſuperficiei ſphæricæ Hemiſphærij, & quod ſuperficies ſectorum primorum ſint ad ſuperficiem ſpęricam Hemiſphærij in ratione quadratorum linearum ſubtenſarum ad quadratum AB ſubtenſæ à polo ad marginem Hemiſphærij; & quod ſecundorum ſectorum ſuperficies ſphæricæ ſint ad ſuperficiem ſphęricam Hemiſphęrij ſicut exceſſus quadrati ſubtenſę maioris ſupra minorem ad quadratum ſubtenſę à polo ad marginem Hemiſphęrij.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Sector ad Hemiſphærium eſt in ratione ſuperficiei ſphæricæ ſectoris, ad ſuperficiem ſphæricam Hemiſphærij.

HOc conſequitur ex demoſtratione Archimedis libro primo de ſphæra & Cylindro propoſitione vltima, vbi demonſtrat quod conus habens baſim æqualem ſuperficiei ſphæricæ ſectoris, altitudinem vero æqualem radio ſphæræ, æqualis ſit ſectori: Vnde conſequitur, quod conus habens baſim æqualem ſuperficiei ſphæricæ hemiſphærij, altitudinem vero æqualem radio, ſit æqualis Hemiſphærio: Coni autem, quorum eadem eſt altitudo, ſunt in ratione baſium; ſunt igitur & ſectores, quorum ſuperficies ſphæricæ ſunt ſicut baſes, altitudines vero eædem, ſcilicet radius ſphæræ quorum ſunt ſectores, in ratione ſuperficierum ſphæricarum, quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex hoc docemur, quomodo Sectori dato conſtituendus ſit Conus in eadem altitudine, æqualis: Si enim ducatur per polum Sectoris planum baſi Hemiſphærij parallelum, & in eo facta fuerit baſis coni æqualis ſuperficiei ſphæricæ Sectoris, & habentis eundem cum Sectore verticem, erit ille conus æqualis Sectori dato. Similiter & cono dato, cuius radius baſis minor

ſit quam ſubtenſa à polo ad marginem Hemiſphærij, altitudo vero linea ęqualis axi Hemiſphętij, conſtitui poteſt ſector ęqualis. Ducatur enim recta ęqualis radio baſis coni, quę applicetur à polo Hemiſphętij ad aliquod punctum in ſuperficie eiuſdem, à quo etiam ducatur recta ad centrum Hemiſphęrij, & ex reuolutione eiuſdem circa axem Hemiſphærij, factus erit Sector ęqualis cono dato.

LEMMA DEFINITIVVM.

Si ſint duo vel plura ſolida vel plana eiuſdem altitudinis, quę cum ſecta fuerint lineis vel planis parallelis etiamſi infinitis, & per ſingula plana vel ſolida, partes linearum vel planorum interceptę habeant viciſſim eandem rationem vel proprietatem. Dico, tota plana vel ſolida, eaſdem rationes vel proprietates habere, quas habent lineę vel plana intercepta; & quod omnes, & ſingulę partes quęcumque, vel planorum vel ſolidorum inter eaſdem lineas vel plana interceptę, ſint in eâdem ratione ſeu proprietate.

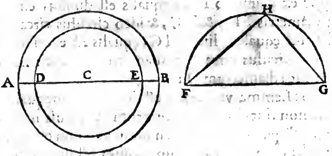
Hoc elicitur ex demonſtratis ab Archimede, & alijs inſignibus Mathematicis per viam exceſſuum, & defectuum, & proportionum, & demonſtrari potuit per propoſitionem quintam Archimedis de conoidibus, & ſphæroidibus, ope Corollarij eidem propoſitioni annexę, vbi demonſtrat proportionem ellipſis ad circulum circa maiorem ellipſis diametrum, eſſe ſicut minoris diametri ad maiorem.

Nota. Animaduertendum etiam eſt, quod breuitatis cau-

ſa ſępe omiſſę ſunt in conſtructionibus, ſectiones figurarum per axem, quę licet in multis ſequentium propoſitionum, ſicuti & in vltima præterita, videantur neceſſarię, attamen quoniam earum ſuppoſitio ſatis obuia eſt lectori, minus neceſſarium duxi eas demonſtrationibus inſerere.

LEMMA.

Si fuerint duo Circuli inæquales circa idē centrum, & ex quadrato diametri maioris ſubductum fuerit quadratum diametri minoris, reliqui quadrati latus æquale erit diametro Circuli, æqualis exceſſui maioris ſupra minorem.



Sit circulus cuius diameter A B, centrum C, & circa idem centrum alius minor cuius diameter DE; oporteat autem tertium exhibere, qui exceſſui maioris ſupra minorem æqualis ſit. Ducatur recta F G, ęqualis diametro A B, deſcriptoque ſuper illâ ſemicir-

culo F H G, a puncto F, applicetur linea F H, ęqualis diametro circuli minoris D E, quę cum minor ſit diametro F G, cadet intra ſemicirculum in puncto H, peripherię, à quo ducatur H G linea, faciens triangulum rectangulum F H G. Dico lineam H G, ęqualem eſſe diametro circuli quęſiti.

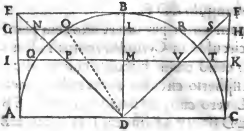
2. duodecimi. Quoniam enim circuli ſunt inter ſe ſicut quadrata diametrorum ſuorum, linea autem F G, ęqualis eſt diametro A B, & linea F H, ęqualis diametro D E, erit ſicut quadratum F G, ad quadratum F H, ita circulus ex A B diametro, ad circulum ex diametro D E, & per conuerſionem rationis ſicut quadratum F G, ad quadratum H G, ita circulus maior circa diametrum A B, ad exceſſum quo maior excedit minorem circa diametrum D E; ſed quadratum F G, ęquale eſt duobus quadratis F H, & H G. Circulus igitur ex diametro F G, ęqualis eſt duobus circulis ex diametris F H, & H G, & ideo circulus circa diametrum ęqualem lineę H G, ęqualis eſt exceſſui quo maior circulus circa A B diametrum excedit minorem circa diametrum D E.

Hoc Lemma vniuerſale eſt de circulis inęqualibus licet non ſint circa idem centrum, vt cuiuis manifeſtum eſſe poteſt; quia tamen nobis vſui non eſt niſi in circulis circa idem centrum, viſum eſt illud hic ita proponere.

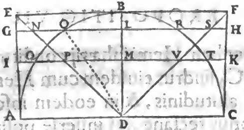
PRO-

PROPOSITIO VII.

Si ſuper baſi Hemiſphærij conſtitutus fuerit Cylindrus eiuſdem cum Hemiſphærio altitudinis, & in eodem inſcribatur Conus rectangulus inuerſe poſitus; erit hic æqualis exceſſui Cylindri ſupra Hemiſphærium, & in omnibus partibus vbicunque interceptis inter plana ad baſim parallela, partes viciſsim interceptæ æquales erunt.



SIt Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D, & ſuper baſi A C, Cylindrus E C, eiuſdem cum hemiſphærio altitudinis, & in eo conſtitutus Conus EDF, inuerſe poſitus, habens verticem in centro D; qui, cùm baſis radius E B, æqualis ſit altitudini B D, erit rectangulus; Secentur vtcunque omnia duobus planis



G H, & I K, baſi A C, parellelis, & iterum ſecentur plano per axem B D, ad baſim recto, faciente in Hemiſphęrio ſemicirculum A B C, in cono triangulum rectangulum E D F, & in planis parellelis, lineas G H, I K. Dico partem ſolidam Cylindri E C, quę eſt extra Hemiſphęrium, & notatur literis A E B F C, vel exceſſum Cylindri ſupra Hemiſphærium, ęqualem eſſe Cono rectangulo E D F.

Quoniam enim per interſectionem plani G H, factus eſt circulus in Cylindro, cuius radius eſt recta G L, in cono etiam circulus cuius radius N L, & in Hemiſphęrio circulus cuius radius linea O L; radius N L vero cum ſit parallelus lateri E B, in triangulo E D B, erit ad lineam L D, ſicut E B ad B D, & ideo ęqualis L D; Et ſi ducatur a puncto O, ad centrum linea O D; erit quadratum ex O D, ęquale duobus quadratis O L, & L D, hoc eſt quadratis ex O L, & N L; ſed G L, & O D, ſunt ęquales; Igitur quadratum ex G L, ęquale eſt quadratis ex O L, & N L; & ideo circulus factus ex radio G L, ęqualis erit duobus circulis ex radijs N L, & O L; ſed & idem circulus

ex

ex radio G L, æqualis eſt circulo ex radio O L, vna cum exceſſu facto ex parte G O; Quod igitur factum eſt ex parte G O, æquale eſt ei quod factum eſt ex radio N L, ac proinde circulus ex radio N L, æqualis eſt exceſſui circuli ex radio G L, ſupra circulum ex radio O L, ſupra circulum ex radio O L. Sed N L, eſt radius circuli in cono rectangulo E D F, & quod factum eſt ex parte G O, eſt exceſſus circuli in Cylindro ſupra circulum in Hemiſphærio. Exceſſus igitur circuli facti in Cylindro, ſupra circulum factum in hemiſphęrio per interſectionem eiuſdem plani paralleli G H, æqualis eſt circulo facto in cono rectangulo. Lemma præcedés.

Simili modo demonſtrabitur quod circulus factus a radio P M, æqualis erit exceſſui circuli in Cylindro ex radio I M, ſupra circulum in Hemiſphærio ex radio Q M, ſcilicet ei quod ex parte I Q, factum ſit; & ſimiliter in omnibus partibus licet in infinitas ſectus fuerit Cylindrus. Pari ratione demonſtrabitur, quod ſingulę partes interceptę inter eadem plana parallela, ſingulis partibus coni correſpondentes ipſis æquales ſint, ſcilicet quod pars Cylindri E C, notata literis G O Q I R H K T, ſit æqualis parti Coni rectanguli notatę literis N P V S, quę inter plana parallela G H, I K, intercipiuntur, Et quod totus exceſſus æqualis ſit toti Cono, quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

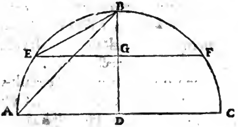
Patet ex demonſtratis quod cum Cylindrus ſit triplus coni ſuper eadem baſi & eiuſdem altitudinis, hemiſphærium erit duplum Coni in ipſo inſcripti. 10. duodecimi.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO VIII.

Si Hemiſphærium ſectum fuerit plano baſi parallelo, ſuperficies eius ſphęrica ſecabitur in eâdem ratione quâ ſecatur axis.



SIt Hemiſphærium ABC, ſectum plano EF, baſi parallelo, ſecante axem BD, in puncto G; Dico quod ſicut BD, ad BG, ita ſe habet ſuperficies ſphęrica hemiſphęrij ABC, ad ſuperficiem ſphęricam portionis EBF: Ducantur enim lineę BA, BE; & quoniam ſuperficies ſphęrica ABC, eſt ad ſuperficiem ſphęricam EBF, ſicut quadratum lineę BA, ad quadratum lineę BE; eſt autem quadratum lineę BA, ęquale rectangulo ex duplâ BD, in BD, & quadrato linea BE, ęquale eſt rectangulum ex duplâ BD, in BG; rectangula autem ſuper baſibus ęqualibus ſunt in ratione altitudinum, rectangulum igitur ex dupla BD, in BD, ad rectangulnm ex eadem dupla BD, in BG, ſe habet ſicut BD, ad BG: ſed & quadrata AB, & EB,

Per Corol. 5. huius.

cum

cum ſint çqualia prędictis rectangulis, ſunt in eadem ratione, ſcilicet lineç BD, ad BG: Ex çquali igitur ſuperficies ſphçrica ABC; ſe habet ad ſuperficiem ſphçricam EBF, ſicut BD, ad BG: Si igitur ſectum fuerit Hemiſphçrium &c. quod demonſtr.

LEMMA.

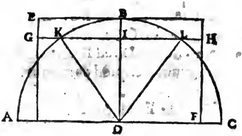
Cum ab Archimede demonſtratum ſit, quod ſectores çquales ſint conis, quorum baſes ſunt çquales ſuperficiebus ſphçricis ſectorum, & altitudines çquales radio ſphçrç; Sequitur Sectores tanquam conos eiuſdem altitudinis eſſç inter ſe ſicut ſuperficies eorum ſphçricç ſeu baſes: ad Hemiſphçria vero eam habere rationem, quam ipſç ſectorum ſuperficies habent ad ſuperficies hemiſphçriorum quorum ſunt partes. Lib. 1. de ſphæra, & Cylindro prop. 38.

PROPOSITIO IX.

Si conſtituatur Cylindrus æqualis Hemiſphærio circa eundem axem, & ſecetur vtcunque plano baſi parallelo; pars Cylindri intercepta inter planum & baſim, æqualis eſt Sectori ſecundo in ſegmento ſphæræ inter eadem plana intercepto.

SIt Heſphçrium ABC, cui çqualis & circa eundem axem BD, ſit conſtitutus Cylindrus EF, & ſecentur ambo plano GH, baſi AC parallelo, ſecante 1. huius.

C axem



axem in puncto I, & hemiſphærium in K L, vnde facti ſint ad centrum D, duo ſectores, ſcilicet primus K D L B, & Sector ſecundus A K D L C: Dico Cylindrum G F, qui eſt pars Cylindri E F, intercepta inter baſim & planum parallelum G H, æqualem eſſe ſectori ſecundo A K D L C.

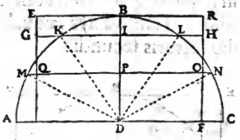
Per 9. huius: Cum enim ſit ſicut B I, ad B D, ita ſuperficies ſphęrica K B L, ad ſuperficiem hemiſphærij, & ſicut ſuperficies ſectoris K D L B, ad ſuperficiem hemiſphęrij, ita ſector ad Hemiſphærium, erit ex æquali; & diuidendo ſicut B I, ad I D, ita ſuperficies ſphęrica K B L, ad ſuperficiem ſphæricam ſectoris ſecundi A K D L C, & ita ſector K B L D, ad reliquum Hemiſphærij dempto ſectore, hoc eſt ad ſectorem ſecundum A K D L C; ſed ſicut BI, ad ID, ita etiam pars Cylindri E H ad partem G F. Ex æquali igitur, cum ſit totus Cylindrus E F, æqualis Hemiſphęrio ABC, erit pars G F, æqualis ſectori ſecundo A K D L C. quod erat. (6. huius.)

COROLLARIVM.

1. Manifeſtum eſt etiam, quod Cylindrus E H, ſit

æqualis

æqualis ſectori primo K B L D, & quod exceſſus eius ſupra portionem K B L I, videlicet qui notatur literis E G K B L H R, ſit æqualis Cono K D L.

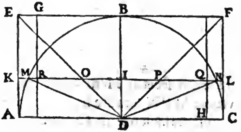


Quod ſi iterum ſecetur Hemiſphærium alio plano parallelo vtpote M P N, ſecante hemiſphęrium in MN, axem vero in P, & faciente in Cylindro E F, partem G O, interceptam inter plana G H, & M N; ſequitur ſectorem ſecundum vel intermedium MKDLN, æqualem eſſe parti Cylindri interceptæ inter eadem plana, videlicet parti G O. 2.

Cum enim ſit ſicut B I, ad I D, ita Cylindrus E H, ad Cylindrum G F; & ita ſector K D L, ad ſectorem ſecundum A K D L C; & ſicut B P, ad P D, ita ſector M B N D, ad ſectorem ſecundum A M D N C: erit ſicut B I, ad B P; hoc eſt ſicut Cylindrus E H, ad Cylindrum E O, ita ſector K B L D, ad ſectorem M B N D; & diuidendo ſicut B I, ad I P, vel Cylindrus EH, ad Cylindrum G O, ita ſector K B L D, ad ſectorem ſecundum M K D L N; ſed ſector K B L D, æqualis eſt Cylindro EH, Igitur ſector ſecundus MKDLN, æqualis erit Cylindro G O.

PROPOSITIO X.

Conus in ſegmento vnà cum cono rectangulo eiuſdem altitudines, æquales ſunt dimidio ſectoris ſecundi.



SIt enim Hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD, Cylindrus EC, ſuper baſi hemiſphærij, & eiuſdem altitudinis; conus rectangulus EDF; Cylindrus etiam GH, æqualis hemiſphærio, & eiuſdem altitudinis; & ſit planum KL, parallelum baſi, ſecans omnia; Cylindrum GH, in R, & Q, conum rectangulum in O, & P, hemiſphærium in M, & N, & axem eorum communem in puncto I; Dico quod conus MDN in ſegmento, vnà cum cono rectangulo ODP ſimul ſumpti æquales ſint dimidio ſectoris ſecundi AMDNC.

7. huius. Cum enim demonſtratum ſit quod conus rectangulus ſit æqualis exceſſui Cylindri ſuper ſegmentum intercepti inter eadem plana parallela; erit conus ODP,

æqualis

æqualis exceſſui AKM N L C, qui eſt exceſſus Cylindri E C, ſupra partem Hemiſphærij A B C, interceptam inter planum K L parallelum & baſim hemiſphærij A C; Si igitur addatur conus M D N, erunt ſimul ſumpti conus rectangulus O D P, cum cono ſegmenti M D N, æquales toti exceſſui Cylindri K C, ſupra ſectorem ſecundum A M D N C: ſector vero ſecundus æqualis eſt Cylindro R H, qui pars eſt Cylindri G H, æqualis Hemiſphærio & inter eadem plana intercepta; Cylindrus etiam K C, cum ſit eiuſdem altitudinis, ſe habet ad Cylindrum R H, ſicut baſis ad baſim ſcilicet in ratione ſeſquialterâ, hoc eſt ſicut 3 ad 2; igitur Cylindrus K C, eſt Cylindri R H, vnum cum dimidio, & ideo æqualis ſectori ſecundo A M D N C, vna cum dimidio: Sed ſector ſecundus vna cum cono ſegmenti M D N, & cono rectangulo O D P, ſimul, æquales ſunt Cylindro K C; hoc eſt tribus, qualium ſector ſecundus æqualis eſt duobus; reliqui igitur conus rectangulus cum cono ſegmenti conficiunt vnum, & ideo æquales ſunt dimidio ſectoris ſecundi A M D N C, quod erat demonſtrandum.

9. huius.

1. huius.

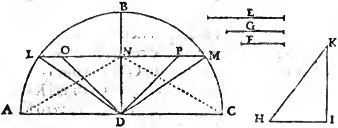
PROPOSITIO XI.

Conum ſegmenti ad Conum rectangulum eiuſdem altitudinis in quacunque datâ ratione conſtituere.

[library stamp]

SIt Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D, & data ſit ratio E, ad F, in qua oporteat conſtituere

conum



conum ſegmenti ad conum rectangulum eiuſdem altitudinis: Sit igitur G, media proportionalis inter E, & F, & fiat triangulum rectangulum H I K, cuius baſis K I ſit æqualis E, & latus H I, circa angulum rectum æquale G; Fiat iam angulus B D L, æqualis angulo K H I, & per punctum L, in ſuperficie Hemiſphærij tranſeat planum baſi A C, parallelum, faciens ſegmentum A L M C, in quo ſit conus ſegmenti LDM: a puncto etiam N, interſectionis plani cum axe, in plano ſumatur punctum O, ita vt O N, æqualis ſit N D, & ex reuolutione trianguli O N D, fiat conus rectangulus O D P: Dico conum ſegmenti L D M, ad conum rectangulum O D P, habere rationem quam habet linea E, ad lineam F.

11 duodecimi. Quoniam enim coni L D M, & O D P, ſunt eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe ſicut baſes; ſunt autem
2. duodecimi. baſes in dupla ratione radiorum ſuorum; per constructionem vero factus eſt radius O N, æqualis lateri N D, trianguli L N D; triangulum vero L N D, æquiangulum eſt triangulo K H I, & ideo ſe habet L N ad N D, ſicut K I, ad I H; Sed N O, æqualis eſt N D, eſt igi-

tur

tur L N, ad N O, ſicut K I, ad I H; Cum ergo L N ſit radius baſis coni L D M; O N, vero radius baſis coni O D P, erit conus L D M, ad conum O D P, in dupla ratione L N, ad O N, hoc eſt ſicut E, ad F, quod erat propoſitum.

Aduertendum eſt quod ſi velis conum inſcriptum ſegmento eſſe minorem cono rectangulo in ratione data, tunc faciendus eſt angulus L D N, æqualis minori angulo trianguli H I K, ſcilicet angulo ad K, & factum erit propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſitione elicitur etiam quod ſi conſtituatur conus ſuper baſi Hemiſphærij & eiuſdem altitudinis cum reliquis, erit conus ille æqualis duobus conis L D M, & O D P. Sit enim conus A N C, ſuper baſi hemiſphærij A C, & eiuſdem altitudinis D N; & quoniam radius baſis A D, æqualis eſt lineæ L D, erit quadratum ex A D, æquale duobus quadratis ex L N, & N D, ſed N D, & N O, ſunt æquales; Igitur quadratum ex A D, æquale eſt duobus quadratis ex L N, & N O; & circulus ex A D, hoc eſt baſis coni A N C, æqualis erit duobus circulis ex radijs L N, & O N, hoc eſt baſibus duorum conorum L D M, & O D P; & ideo ambobus æqualis erit: Et per præcedentem ſcilicet 10. huius conus A N C, æqualis erit dimidio ſectoris ſecundi A L D M C.

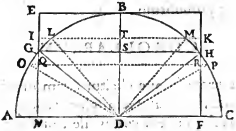
Lemma ante 7. huius.

10. huius.

Digitized by Google

PROPOSITIO XII.

Conorum inſcriptorum ſegmentis Hemiſphærij maximus eſt ille qui inſcribitur ſegmento facto per interſectionem Cylindri æqualis Hemiſphęrio.



ESto Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D, & circa eundem axem Cylindrus E F, æqualis Hemiſphærio, & per G H, communem interſectionem Hemiſphærij A B C, cum Cylindro E F, ducatur planum parallelum faciens in Hemiſphærio ſegmentum A G H C, in quo conſtituatur conus G D H. Dico hunc eſſe maximum omnium qui in Hemiſphærio poſſunt inſcribi: Ducatur enim aliud planum baſi A C parallelum, faciens ſegmentum in hemiſphærio, in quo ſit conus L D M, qui ſit vel maior vel æqualis ſi fieri poteſt.

9. huius. Quoniam igitur ſector ſecundus A G D H C, æqualis eſt Cylindro G F, eo quod pars ſit Cylindri E F,

æqualis Hemiſphærio, & eiuſdem altitudinis; ſi ex ambobus dempta fuerit pars communis GNDHF, reliqua pars Cylindri, hoc eſt conus GDH, reliquæ parti ſectoris ſecundi, quæ notatur literis AGN, HFC, æqualis erit. Sed conus LDM, ſegmenti ALMC, ſupponitur eſſe vel maior, vel æqualis cono GDH: eſt igitur vel maior vel æqualis exceſſui AGN FHC. Cylindrus vero IF, eſt æqualis ſectori ſecundo ALDMC; demptâ itaque ex vtroque parte communi, quæ notatur literis NGLDMHF, erit reliqua pars ſectoris ſecundi æqualis reliquæ parti Cylindri; hoc eſt pars AGNFHC, æqualis cono LDM, vna cum parte GILMKH: conus itaque GDH, maior eſt cono LDM, excedit enim illum quantitate partis GILMKH.

Iterum ſi ducatur planum inferius OP, faciens ſegmentum in Hemiſphærio AOPC, in quo ſit conus ODP, dico etiam hunc minorem eſſe cono GDH:

Cum enim baſis coni ODP, maior ſit quam baſis coni GDH, ſecabit latera Cylindri EF; ſecet igitur in Q, & R, & ſector ſecundus AODPC, æqualis erit Cylindro QF, ex quibus demptâ parte communi, reliquæ partes erunt æquales hoc eſt AON, FPC, æqualis erit cono ODP, demptâ parte inter O, & Q, & inter R, & P, quibus vtrinque additis erit totus exceſſus AOQN, FRPC, toti cono ODP, æqualis, ſed pars AOQN, FRPC, minor eſt cono GDH, quantitate partis OGQ, RHP; minor igitur eſt conus ODP, cono GDH: maximus ergo eſt conus GDH, omnium qui inſcribi poterunt in Hemiſphæ- 9. huius.

rio; cum omnes qui vel ſupra vel infra inſcribuntur minores ſint. Conorum igitur inſcriptorum &c.

SCHOLIVM.

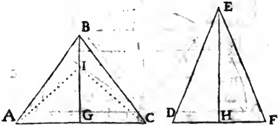
Ex huius Theorematis demonſtratione duo ſe præbent obſeruatione digna: Primum quod proportio laterum huius trianguli G D S, ex cuius reuolutione factus eſt conus G D H, eſt ea quam notauimus in Corollario ad ſecundam propoſitionem huius, ſcilicet diametri ſphæræ, lateris Cubi, & lateris Pyramidis in eâdem ſphærâ inſcriptibilium, ſunt enim eorum dimidia. Vnde etiam ſequitur, quod cum conus GDH, ſit maximus inſcriptibilis, Cylindrus G F, erit maximus Cylindrorum qui eodem Hemiſphærio inſcribi poterit.

Secundum, quod licet conus G D H, ſit maximus qui in Hemiſphærio inſcribi poterit; attamen triangulum G D S, ex cuius reuolutione factus eſt, non ſit maximum triangulum. Ponatur enim quod in triangulo L D T, latera L T, & T D, facta fuerint æqualia, quod fieri potuiſſet, cum in triangulo G D S, latus G S, maius ſit latere S D: Cum igitur latera L T, & D T, ſint æqualia, ſi ab angulo T, demittatur perpendicularis in latus L D, erit perpendicularis æqualis dimidiæ L D, & ſpatium contentum in triangulo L D T, æquale erit quadrato ex perpendiculari: In triangulo vero G D S, ſi a puncto S, demiſſa fuerit perpendicularis ad baſim G D, non cadet in dimidium baſis G D, & ideo minor erit perpendicularis quam li-

nea quæ ab S, ad dimidiam G D, duceretur; linea vero quæ ab S, ad dimidiam G D, ducetur, æqualis erit dimidiæ G D: ſpatium igitur contentum in triangulo G D S, æquale eſt rectangulo ex perpendiculari & dimidia baſis G D, & minus igitur quam quadratum ex dimidia G D, vel perpendiculari in triangulo L D T, & ideo triangulum G D S, minus triangulo L D T.

LEMMA.

Coni ſunt inter ſe in ratione compoſitâ ex baſibus & altitudinibus.

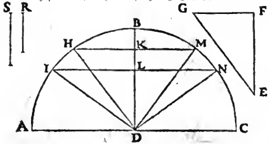


Sint duo coni A B C, & D E F, quorum altitudines ſint rectæ B G, & E H; Dico rationem coni ABC, ad Conũ D E F; eſſe cõpoſitam ex rationibus baſis A C ad baſim D F, & altitudinis B G, ad altitudinem E H. Fiat enim ſicut baſis A C, ad baſim D F, ita linea E H, ad lineam G I, in rectâ B G, ſi opus productâ; & erit conus ex baſi A C, & altitudine G I, æqualis cono D E F: Quare conus A B C, eſt ad conum D E F, ſicut linea B G, ad lineam I G; compoſita autem eſt ratio B G, ad I G, ex rationibus B G, ad E H, & E H, ad

I G; hoc eſt altitudinis coni A B C, ad altitudinem coni D E F, & baſis eiuſdem coni A B C, ad baſim coni D E F. Compoſita igitur eſt ratio ipſorum ad inuicem ſicut enunciatum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Inſcribere Hemiſphærio duos conos in ratione datâ.



SIt ratio data R, ad S, in qua inſcribendi ſint Hemiſphærio duo coni. Fiat igitur triangulũ rectangulum E F G, cuius latera E F, & F G, circa angulũ rectũ F, ſint æqualia lineis S, & R, & ex radio æquali G E; deſcribatur ſemicirculus A B C, cuius centrum D, a quo perpendicularis erigatur D B: facto iam angulo B D H æquali angulo F E G, ducatur linea D H; Iterum fiat angulus B D I, æqualis angulo E G F, & ductâ lineâ D I, ad peripharıam circuli, a punctis I, & H demittantur ad lineam B D, perpendiculares I L,

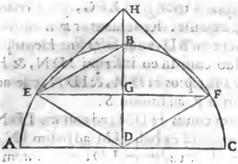
& H K; triangula iam facta I L D, & HKD; ſunt ambo ſimilia & æqualia triangulo E F G, quare etiam ad inuicem ſunt æqualia. Reuoluantur iam omnia circa axem manentem B D, vnde facta ſint Hemiſphærium A B C, & duo coni in eo inſcripti I D N, & H D M: Dico conos inſcriptos H D M, & I D N, eſſe ad inuicem ſicut linea R ad lineam S.

Cum enim conus H D M, ad conum I D N, ſit in ratione compoſitâ ex baſi H M ad baſim I N, & altitudine K D ad altitudinem L D; baſes autem H M, & I N, ſint inter ſe ſicut quadrata H K, & I L, radiorum ſuorum; H K, vero æqualis ſit L D, & I L, æqualis K D; baſis H M, ad baſim I N, ſe habet ſicut quadratum L D, ad quadratum K D; altitudines vero conorum ſunt ipſæ L D, & K D, quare proportio coni H D M, ad conum I D N, compoſita eſt ex quadrato L D, ad quadratum K D, vel ex duplâ ratione L D, ad K D, & ex lineâ K D, ad lineam L D, hoc eſt ratione ſimplâ K D, ad L D: deductâ igitur ſimplâ ratione L D ad K D, (vel quod idem eſt additâ ratione K D, ad L D) ex duplâ ratione L D, ad K D, quæ remanet erit ſimpla ratio L D ad K D, & ideo conus H D M, erit ad conum I D N, ſicut linea L D, ad lineam K D, vel R, ad S, quod faciendum erat.

PROPOSITIO XIV.

Dato ſectori in Hemiſphærio facere Rhombum æqualem.

Sit



SIt in Hemiſphærio A B C, cuius centrum D, ſector E B F D, datus, cui oporteat Rhombum æqualem conſtituere; Secetur igitur Hemiſphærium per E, & F, plano ad baſim parallelo, ſecanre etiam axem B D, in puncto G; producto iam axe quantum opus ad partes B, fiat ſicut B D, & G D, tanquam vna ad duplam B D, ita B D, ad H D; & ab H, puncto in axe producto ductis lineis E H, & F H, concipiatur Rhombus E H F D, quem dico æqualem eſſe Sectori E B F D.

Quoniam enim rectangulum ex duplâ B D, in B G, æquale eſt quadrato ex E B; rectangulum etiam ex B D, & G D, tanquam vnâ in B G, æquale eſt quadrato ex E G; rectangula autem quorum eadem eſt altitudo ſe habent ſicut baſes; Rectangula igitur ſunt inter ſe ſicut dupla B D, ad B D, G D ſimul, hoc eſt ſicut H D, ad B D. Sed & quadratum E B, ad quadratum E G, (cum ſint æqualia prædictis rectangulis) ſunt in eâdem ratione ſicut H D, ad B D; Circulus igitur ex radio E B, ad circulum ex radio E G, ſe habet ſicut linea H D, ad

lineam

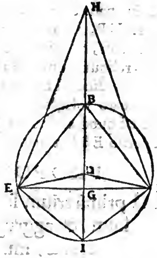
lineam B D: Rhombus vero E H F D, cum ſit compoſitus ex duobus conis quorum eadem eſt baſis circa diametrum E F, altitudo vero amborum eſt linea H D, æqualis eſt vni cono ſuper eadem baſi & eiuſdem altitudinis; Sector etiam E B F D, æqualis eſt cono, cuius baſis radius eſt linea E B, & altitudo B D: Rhombus igitur E H F D æqualis eſt ſectori E B F D; reciprocantur enim baſes, & altitudines: Factus eſt igitur Rhombus æqualis ſectori dato, quod &c. Arch. de ſph. & Cylindro 38. lib. 1.

COROLLARIVM PRIMVM.

Ex hoc patet quod conus E H F, factus eſt æqualis portioni E B F; dempto enim ex vtroque communi cono E D F, reliquus conus E H F æqualis eſt portioni E B F.

II.

Iterum conſtat quod in maioribus etiã proportionibus ſphærarum ſit quoddam genus ſectorum, (veluti ſi in portione E B F; quæ iam maior ſit Hemiſphærio, in quâ ad centrum ductæ ſint lineæ E D, & F D in plano ex ſectione per axem facto, ex quarum & portionis circuli E B F reuolutione factum erit ſolidum incauatum) cuius ratio ad ſphæram vel Hemiſphærium erit ſimilis ei, quam habent alij ſectores

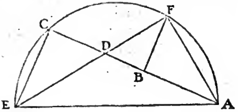


ad ſphæras vel hemiſphæria, quorum ſunt partes; ſcilicet in ratione ſuperficierum ſphæricarum ſuarum, vel rectarum quæ ſunt axes portionum; videlicet ſolidum incauatum, vel ſector E B F D erit ad ſphæram, ſicut ſuperficies ſphærica eius E B F, ad ſuperficiem totam ſphæræ, vel ſicut recta B G, altitudo portionis, ad B I, diametrum ſphæræ; quod liquido apparebit ex prius demonſtratis; quare eâdem ratione conſtruendus eſt Rhombus æqualis ſectori E B F D, maiori, quâ vſi ſumus in conſtructione minoris: Cum enim quadratum E G æquale ſit rectangulo I G B; quadratum vero E B, æquale rectangulo I B G; ideò quadratum E G, ad quadratum E B eſt ſicut linea I G, ad lineam I B. Fiat igitur ſicut I G, ad I B, ita D B, ad D H; & conus cuius baſis eſt ex radio E G, & altitudo D H, æquale erit cono cuius baſis eſt ex radio E B, altitudo vero B D; ſed conus E H F, æqualis eſt cono E D F, vnà cum cono ex eâdem baſi, & altitudine D H; dempo igitur cono E D F, reliquus conus incauatus E H F D, æqualis erit cono ex radio baſi E B, & altitudine B D, hoc eſt ſolido excauato vel ſectori E B F D: Vnde etiam manifeſtum eſt quod addito vtrique communi cono E D F, erit portio E B F æqualis cono E H F.

PROPOSITIO XV.

Datâ primâ trium linearum proportionalium, & aggregato ſecundæ & tertiæ, inuenire ſecundam & tertiam.

Sit

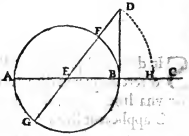


SIt data A B prima, & B C aggregatum ſecundæ & tertiæ, quæ in directum applicetur lineæ A B, & fiat vna linea recta; deinde ad rectos angulos in puncto C applicetur linea C E, æqualis A B datæ, & compleatur triangulum A C E. Deſcribatur iam circa diametrum A E, ſemicirculus E C F A, tranſiens per punctum C; & a puncto B, ducatur B F, parallela lineæ C E ad punctum F, in periphæriâ circuli, & connectantur F A, & F E: recta vero F E ſecabit lineam C B, in puncto D; Dico lineam C B, diuiſam eſſe in D, vt ſit ſicut A B, ad C D, ita C D, ad D B.

Quoniam enim in triangulis E C D, & A B F, anguli ad C, & B, ſunt recti; anguli etiam C E D, & B A F, æquales ſunt, cum inſiſtant eidem periphæriæ C F; erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis; & triangula E C D, A B F ſimilia: Latus vero E C, factum eſt æquale lateri A B; ideo, cùm ſint homologa latera ſubtendentia æquales angulos, erunt reliqua latera homologa reliquis lateribus homologis æqualia. Latus igitur C D, trianguli E C D, æquale eſt lateri F B, trianguli A B F. Cum etiam in triangulo D F A,

angulus F in ſemicirculo rectus ſit; & linea FB, perpendicularis; erunt triangula AFB, & DFB, ſimilia: & ſicut AB, ad BF, ita BF, ad BD. Sed BF æqualis eſt CD, vti iam demonſtrauimus: erit igitur ſicut AB ad CD, ita CD ad DB; & linea CB, diuiſa eſt in D, ſicut propoſitum erat.

Idem etiam efficietur hoc modo. Sit AB prima data, & ſit BC aggregatum ſecũdæ ac tertiæ, quæ fiant in directum vna linea; a puncto B, erigatur perpendicularis BD, quæ ſit



media proportionalis inter AB, & BC: diuisâ iam AB bifariam in E, circa diametrum AB, ſcribatur circulus AFBG; & a puncto D, per centrum E, ducatur linea ad extremam circuli, quæ ſit DFEG. Centro etiam E, & interuallo ED, deſcribatur arcus circuli DH, qui ſecabit lineam BC in H. Dico iam quod linea BC diuiſa ſit in puncto H, vt ſint AB, BH, & HC, continue proportionales.

Cum enim linea DB, ſit perpendicularis AB, tanget circulum AFBG in puncto B, & ideo rectangulum GDF, æquale eſt quadrato ex DB; Iterum cum per conſtructionem facta ſit linea EH, æqualis ED; erit tota AH, æqualis toti GD; & deductis æqualibus reliquæ BH, & FD, æquales erunt inter ſeſe; rectangulum igitur AHB, rectangulo GDF, & ideo quadrato DB, æquale erit. Sed per conſtructionem re-

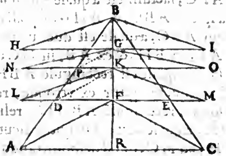
ctan-

ctangulo A B C, factum eſt æquale quadratum B D, rectangula igitur A B C, & A H B, æqualia ſunt. Sed rectangulum A B C, æquale eſt duobus rectangulis, ſcilicet ex A B, in B H, & ex A B, in H C; & rectangulum A H B, æquale eſt rectangulo A B H, & quadrato B H; deducto igitur ex vtroque, rectangulo A B H, reliquum rectangulū A B, H C, reliquo quadrato ex B H, æquale erit. Eſt igitur ſicut A B, ad B H, ita B H, ad H C, quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

Truncus coni eſt ad conum eiuſdem baſis & altitudinis, ſicut tres lineæ in continuā proportione ſimul ſumptæ ad maximam trium: Proportio autem debet eſſe eadem quam habet diameter baſis maioris ad diametrum baſis minoris eiuſdem Trunci.

SIt enim conus A B C, ſectus plano baſi parallelo D E, faciente truncum A D E C, & conum DBE, reliquum coni A B C. Ducatur iam axis B R, ſecans planum D E, in puncto F, & fiat ſicut quadratum A C ad quadratum D E, ita linea B F ad lineam B G; & ducto plano per G, ad baſim A C parallelo, & in eo factâ baſi æquali baſi A C, conſtituatur circa axem B G, conus H B I, qui æqualis erit cono D B E; reci-



15.duodecimi. procantur enim baſes & altitudines eorum. Diuidatur iam GF in puncto K, vt ſint RF, FK, & KG,
15. huius continue proportionales; & per puncta F, & K, agantur plana parallela baſi AC, & ſuper ſingulis conſtituantur coni habentes baſes, æquales baſi AC, & altitudines FK, & KG; qui ſint LKM, NGO.

Et quoniam conſtituti ſunt quatuor coni ſuper baſibus æqualibus, facientes ſimul altitudinem BR; e-
14. duodecimi. runt ſimul ſumpti æquales cono ABC. Conus autem HBI, vnus ex quatuor, per conſtructionem factus eſt æqualis Cono DBE; Reliqui igitur tres, AFC, LKM, & NGO ſimul æquales ſunt trunco ADEC, Sed iſti tres coni ſunt ad conum AFC, ſi-
14. duodecimi. cut linea GR, ad lineam FR, hoc eſt ſicut tres lineæ proportionales ad maximam trium; erit enim RF ſemper maxima, vt poſtea demonſtrabimus.

Reſtat iam demonſtrandum, quod proportio quam habet RF, ad FK, & FK ad KG, ſit eadem quæ eſt AC ad DE, quod ſic oſtendemus. Secentur omnia plano per axem faciente in vtroque cono triangulum, & in interſectione trianguli ABC, cum triangulis

LKM, NGO, ducantur lineæ ad puncta G, & K, quæ ſint PG & DK. Igitur cum triangula BAR, BDF; & BPK ſint ſimilia, erunt ſegmenta AD ad DP, ſicut RF ad FK, & FK ad KG: Sed cum ſit FK ad KG, ſicut AD ad DP; Erit conuertendo & permutando; ſicut AD ad FK, ita DP ad KG; & ideo lineæ AF, DK, & PG erunt parallelæ, & triangula AFR, DKF, & PGK ſimilia; & propterea lineæ RF, FK & KG, in eâdem ratione quâ ſunt AR, DF & PK.

Hoc etiam aliter demonſtrabitur: Per conſtructionem enim facta eſt BF ad BG, ſicut quadratum AR ad quadratum DF; Sed ſicut linea AR ad lineam DF; ita eſt RB ad BF. Dupla igitur eſt ratio FB ad BG quæ RB ad FB. Si igitur fiat media proportionalis inter FB & BG, quæ ſit BK, erunt quatuor lineæ continue proportionales RB, FB, KB, & GB, quarum exceſſus etiam erunt lineæ proportionales, & in eâdem ratione qua ſunt quatuor maiores; Cum enim ſit ſicut RB ad FB, ita FB ad KB; Erit diuidendo ſicut FB ad FR, ita KB ad KF; & conuertendo ſicut RB ad FB, ita RF ad FK. Simili modo etiam demonſtrabitur eandem eſſe rationem FK ad KG. Sunt igitur RF, FK & KG, in eâdem ratione, quâ ſunt RB ad FB, vel AR ad DF, hoc eſt AC ad DE; & conſtat quod K ſit idem punctum in linea FG, ſiue diuidatur prout in conſtructione, ſiue facta fuerit BK media proportionalis inter BG & BF, quemadmodum iam fecimus. Truncus igitur ADEC, qui oſtenſus eſt æqualis tribus Conis AFC, LKM, & NGO, eſt ad conum AFC, ſicut ad RF maximam

trium linearum proportionalium ſunt tres Conorum axes, hoc eſt lineæ R G aggregatum trium proportionalium in ratione diametri A C baſis maioris trunci ad D E diametrum minoris baſis eiuſdem trunci, quod erat demonſtrandum.

Quod autem R F ſit maxima trium proportionalium manifeſtum eſt: cum enim R B, F B, K B & G B ſint quatuor lineæ continue proportionales, & R B earum maxima; & R F, F K, & K G earum exceſſus in eâdem ratione, erit neceſſario R F exceſſuum maximus.

COROLLARIVM.

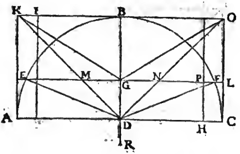
Hinc apparet quod Conus ſuper baſi A C & in altitudine R G æqualis erit trunco A D E C; Erit enim æqualis tribus Conis A F C, L K M, & N G O: Vnde ſequitur quod dato Trunco Coni conſtitui poſſit Conus æqualis.

Conus æqualis trũco dato.

PROPOSITIO XVII.

Conus ad ſectorem ſuum eam habet proportionem, quam ad diametrum baſis Hemiſphærij habent ſimul ſumpti axis Coni vnà cum tertiâ proportionali minore, in ratione axis Hemiſphærij ad axem Coni.

Digitized by Google



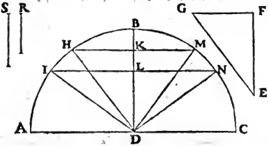
ESto enim Hemiſphærium ABC, cuius centrũ D, & axis BD, in quo ſit ſector circa eundem axem EBFD, cuius Conus EDF, & producto axe fiat ſicut BD ad GD axem coni, ita GD ad DR. Dico proportionem coni EDF ad ſectorem EBFD, eſſe ſicut linea GR compoſita ex axe coni & tertia proportionali ad AC diametrum baſis hemiſphærij; Fiat enim circa eundem axem hemiſphærij & ſuper eadem baſi Cylindrus KC, & in eo ſit Conus rectangulus KDO: Fiat etiam Cylindrus IH æqualis Hemiſphærio & eiuſdem altitudinis.

Cum igitur Conus rectangulus KDO, diuiſus ſit per baſim Coni EDF in M, & N, vnde factus eſt truncus KMNO; Fiat etiam in trunco, ſuper baſi KO; & eiuſdem altitudinis BG, Conus KGO; Eſt igitur ſicut KB ad MG, ita BD ad GD; ſunt enim priores & ſecundi inter ſe æquales. Compoſitum igitur ex BD, GD, & DR, eſt compoſitum ex tribus proportionalibus in ratione KB ad MG, quarum maior eſt linea BD: Truncus igitur KMNO, eſt ad

I G; hoc eſt altitudinis coni A B C, ad altitudinem coni D E F, & baſis eiuſdem coni A B C, ad baſim coni D E F. Compoſita igitur eſt ratio ipſorum ad inuicem ſicut enunciatum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Inſcribere Hemiſphærio duos conos in ratione datâ.



Sit ratio data R, ad S; in qua inſcribendi ſint Hemiſphærio duo coni. Fiat igitur triangulũ rectangulum E F G, cuius latera E F, & F G, circa angulũ rectũ F, ſint æqualia lineis S, & R. & ex radio æquali G E; deſcribatur ſemicirculus A B C, cuius centrum D, a quo perpendicularis erigatur D B: facto iam angulo B D H æquali angulo F E G, ducatur linea D H; Iterum fiat angulus B D I, æqualis angulo E G F, & ductâ lineâ D I, ad peripharıam circuli, a punctis I, & H demittantur ad lineam B D, perpendiculares I L,

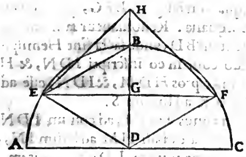
Digitized by Google

& H K; triangula iam facta I L D, & HKD; ſunt ambo ſimilia & æqualia triangulo E F G, quare etiam ad inuicem ſunt æqualia. Reuoluantur iam omnia circa axem manentem B D, vnde facta ſint Hemiſphærium A B C, & duo coni in eo inſcripti I D N, & H D M: Dico conos inſcriptos H D M, & I D N, eſſe ad inuicem ſicut linea R ad lineam S.

Cum enim conus H D M, ad conum I D N, ſit in ratione compoſitâ ex baſi H M ad baſim I N, & altitudine K D ad altitudinem L D; baſes autem H M, & I N, ſint inter ſe ſicut quadrata H K, & I L, radiorum ſuorum; H K, vero æqualis ſit L D, & I L, æqualis K D; baſis H M, ad baſim I N, ſe habet ſicut quadratum L D, ad quadratum K D; altitudines vero conorum ſunt ipſæ L D, & K D, quare proportio coni H D M, ad conum I D N, compoſita eſt ex quadrato L D, ad quadratum K D, vel ex duplâ ratione L D, ad K D, & ex lineâ K D, ad lineam L D, hoc eſt ratione ſimplâ K D, ad L D: deductâ igitur ſimplâ ratione L D ad K D, (vel quod idem eſt additâ ratione K D, ad L D) ex duplâ ratione L D, ad K D, quæ remanet erit ſimpla ratio L D ad K D, & ideo conus H D M, erit ad conum I D N, ſicut linea L D, ad lineam K D, vel R, ad S, quod faciendum erat.

PROPOSITIO XIV.

Dato ſectori in Hemiſphærio facere Rhombum æqualem.



SIt in Hemiſphærio ABC, cuius centrum D, ſector EBFD, datus, cui oporteat Rhombum æqualem conſtituere; Secetur igitur Hemiſphærium per E, & F, plano ad baſim parallelo, ſecanre etiam axem BD, in puncto G; producto iam axe quantum opus ad partes B, fiat ſicut BD, & GD, tanquam vna ad duplam BD, ita BD, ad HD; & ab H, puncto in axe producto ductis lineis EH, & FH, concipiatur Rhombus EHFD, quem dico æqualem eſſe Sectori EBFD.

Quoniam enim rectangulum ex duplâ BD, in BG, æquale eſt quadrato ex EB; rectangulum etiam ex BD, & GD, tanquam vnâ in BG, æquale eſt quadrato ex EG; rectangula autem quorum eadem eſt altitudo ſe habent ſicut baſes; Rectangula igitur ſunt inter ſe ſicut dupla BD, ad BD, GD ſimul, hoc eſt ſicut HD, ad BD. Sed & quadratum EB, ad quadratum EG, (cum ſint æqualia prædictis rectangulis) ſunt in eâdem ratione ſicut HD, ad BD; Circulus igitur ex radio EB, ad circulum ex radio EG, ſe habet ſicut linea HD, ad

lineam B D: Rhombus vero E H F D, cum ſit compoſitus ex duobus conis quorum eadem eſt baſis circa diametrum E F, altitudo vero amborum eſt linea H D, æqualis eſt vni cono ſuper eadem baſi & eiuſdem altitudinis; Sector etiam E B F D, æqualis eſt cono; cuius baſis radius eſt linea E B, & altitudo B D: Rhombus igitur E H F D æqualis eſt ſectori E B F D; reciprocantur enim baſes, & altitudines: Factus eſt igitur Rhombus æqualis ſectori dato, quod &c.

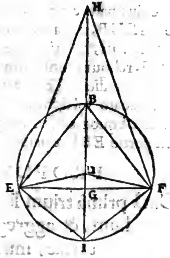
Arch. de ſph.& Cylindro 38. lib.1.

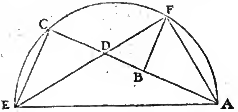
COROLLARIVM PRIMVM.

Ex hoc patet quod conus E H F, factus eſt æqualis portioni E B F; dempto enim ex vtroque communi cono E D F, reliquus conus E H F æqualis eſt portioni E B F.

II.

Iterum conſtat quod in maioribus etiã proportionibus ſphærarum ſit quoddam genus ſectorum, (veluti ſi in portione E B F; quæ iam maior ſit Hemiſphærio, in quâ ad centrum ductæ ſint lineæ E D, & F D in plano ex ſectione per axem facto, ex quarum & portionis circuli E B F reuolutione factum erit ſolidum incauatum) cuius ratio ad ſphæram vel Hemiſphærium erit ſimilis ei, quam habent alij ſectores





SIt data AB prima, & BC aggregatum ſecundæ & tertiæ, quæ in directum applicetur lineæ AB, & fiat vna linea recta; deinde ad rectos angulos in puncto C applicetur linea CE, æqualis AB datæ, & compleatur triangulum ACE. Deſcribatur iam circa diametrum AE, ſemicirculus ECFA, tranſiens per punctum C; & a puncto B, ducatur BF, parallela lineæ CE ad punctum F, in periphæriâ circuli, & connectantur FA, & FE: recta vero FE ſecabit lineam CB, in puncto D; Dico lineam CB, diuiſam eſſe in D, vt ſit ſicut AB, ad CD, ita CD, ad DB.

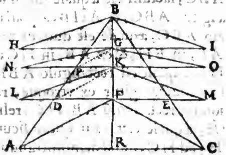
Quoniam enim in triangulis ECD, & ABF, anguli ad C, & B, ſunt recti; anguli etiam CED, & BAF, æquales ſunt, cum inſiſtant eidem periphæriæ CF; erit & reliquus angulus reliquo angulo æqualis; & triangula ECD, ABF ſimilia: Latus vero EC, factum eſt æquale lateri AB; ideo, cùm ſint homologa latera ſubtendentia æquales angulos, erunt reliqua latera homologa reliquis lateribus homologis æqualia. Latus igitur CD, trianguli ECD, æquale eſt lateri FB, trianguli ABF. Cum etiam in triangulo DFA,

ctangulo A B C, factum eſt æquale quadratum B D, rectangula igitur A B C, & A H B, æqualia ſunt. Sed rectangulum A B C, æquale eſt duobus rectangulis, ſcilicet ex A B, in B H, & ex A B, in H C; & rectangulum A H B, æquale eſt rectangulo A B H, & quadrato B H; deducto igitur ex vtroque, rectangulo A B H, reliquum rectangulũ A B, H C, reliquo quadrato ex B H, æquale erit. Eſt igitur ſicut A B, ad B H, ita B H, ad H C, quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

Truncus coni eſt ad conum eiuſdem baſis & altitudinis, ſicut tres lineæ in continuã proportione ſimul ſumptæ ad maximam trium: Proportio autem debet eſſe eadem quam habet diameter baſis maioris ad diametrum baſis minoris eiuſdem Trunci.

Sit enim conus A B C, ſectus plano baſi parallelo D E, faciente truncum A D E C, & conum DBE, reliquum coni A B C. Ducatur iam axis B R, ſecans planum D E, in puncto F, & fiat ſicut quadratum A C ad quadratum D E, ita linea B F ad lineam B G; & ducto plano per G, ad baſim A C parallelo, & in eo factâ baſi æquali baſi A C, conſtituatur circa axem B G, conus H B I, qui æqualis erit cono D B E; reci-



15.duodecimi. procantur enim baſes & altitudines eorum. Diuida-
15. huius tur iam GF in puncto K, vt ſint RF, FK, & KG,
continue proportionales; & per puncta F, & K, agan-
tur plana parallela baſi AC, & ſuper ſingulis conſti-
tuantur coni, habentes baſes æquales baſi AC, & alti-
tudines FK, & KG; qui ſint LKM, NGO.

Et quoniam conſtituti ſunt quatuor coni ſuper ba-
ſibus æqualibus, facientes ſimul altitudinem BR; e-
14.duodecimi. runt ſimul ſumpti æquales cono ABC. Conus au-
tem HBI, vnus ex quatuor, per conſtructionem fa-
ctus eſt æqualis Cono DBE; Reliqui igitur tres,
AFC, LKM, & NGO ſimul æquales ſunt trunco
14.duodecimi. ADEC. Sed iſti tres coni ſunt ad conum AFC, ſi-
cut linea GR, ad lineam FR, hoc eſt ſicut tres lineæ
proportionales ad maximam trium; erit enim RF
ſemper maxima, vt poſtea demonſtrabimus.

Reſtat iam demonſtrandum, quod proportio quam
habet RF, ad FK, & FK ad KG, ſit eadem quæ eſt
AC ad DE, quod ſic oſtendemus. Secentur omnia
plano per axem faciente in vtroque cono triangulum,
& in interſectione trianguli ABC, cum triangulis

LKM, NGO, ducantur lineæ ad puncta G, & K, quæ ſint PG & DK. Igitur cum triangula BAR, BDF, & BPK ſint ſimilia, erunt ſegmenta AD ad DP, ſicut RF ad FK, & FK ad KG: Sed cum ſit FK ad KG, ſicut AD ad DP; Erit conuertendo & permutando, ſicut AD ad FK, ita DP ad KG; & ideo lineæ AF, DK, & PG erunt parallelæ, & triangula AFR, DKF, & PGK ſimilia; & propterea lineæ RF, FK & KG, in eâdem ratione quâ ſunt AR, DF & PK.

Hoc etiam aliter demonſtrabitur: Per conſtructionem enim facta eſt BF ad BG, ſicut quadratum AR ad quadratum DF: Sed ſicut linea AR ad lineam DF; ita eſt RB ad BF. Dupla igitur eſt ratio FB ad BG quæ RB ad FB. Si igitur fiat media proportionalis inter FB & BG, quæ ſit BK, erunt quatuor lineæ continue proportionales RB, FB, KB, & GB, quarum exceſſus etiam erunt lineæ proportionales, & in eâdem ratione qua ſunt quatuor maiores; Cum enim ſit ſicut RB ad FB, ita FB ad KB; Erit diuidendo ſicut FB ad FR, ita KB ad KF; & conuertendo ſicut RB ad FB, ita RF ad FK. Simili modo etiam demonſtrabitur eandem eſſe rationem FK ad KG. Sunt igitur RF, FK & KG, in eâdem ratione, quâ ſunt RB ad FB, vel AR ad DF, hoc eſt AC ad DE; & conſtat quod K ſit idem punctum in linea FG, ſiue diuidatur prout in conſtructione, ſiue facta fuerit BK media proportionalis inter BG & BF, quemadmodum iam fecimus. Truncus igitur ADEC, qui oſtenſus eſt æqualis tribus Conis AFC, LKM, & NGO, eſt ad conum AFC, ſicut ad RF maximam

trium linearum proportionalium ſunt tres Conorum axes, hoc eſt linea R G aggregatum trium proportionalium in ratione diametri A C baſis maioris trunci ad D E diametrum minoris baſis eiuſdem trunci, quod erat demonſtrandum.

Quod autem R F ſit maxima trium proportionalium manifeſtum eſt: cum enim R B, F B, K B & G B ſint quatuor lineæ continue proportionales, & R B earum maxima; & R F, F K, & K G earum exceſſus in eâdem ratione, erit neceſſario R F exceſſuum maximus.

COROLLARIVM.

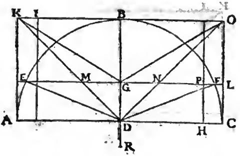
Conus æqualis trũco dato.

Hinc apparet quod Conus ſuper baſi A C & in altitudine R G æqualis erit trunco A D E C; Erit enim æqualis tribus Conis A F C, L K M, & N G O: Vnde ſequitur quod dato Trunco Coni conſtitui poſſit Conus æqualis.

PROPOSITIO XVII.

Conus ad ſectorem ſuum eam habet proportionem, quam ad diametrum baſis Hemiſphærij habent ſimul ſumpti axis Coni vnà cum tertiâ proportionali minore, in ratione axis Hemiſphærij ad axem Coni.

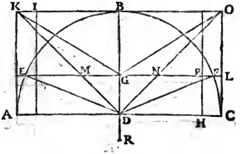
Eſto



ESto enim Hemiſphærium ABC, cuius centrũ D, & axis BD, in quo ſit ſector circa eundem axem EBFD, cuius Conus EDF, & producto axe fiat ſicut BD ad GD axem coni, ita GD ad DR. Dico proportionem coni EDF ad ſectorem EBFD, eſſe ſicut linea GR compoſita ex axe coni & tertia proportionali ad AC diametrum baſis hemiſphærij; Fiat enim circa eundem axem hemiſphærij & ſuper eadem baſi Cylindrus KC, & in eo ſit Conus rectangulus KDO: Fiat etiam Cylindrus IH æqualis Hemiſphærio & eiuſdem altitudinis.

Cum igitur Conus rectangulus KDO, diuiſus ſit per baſim Coni EDF in M, & N, vnde factus eſt truncus KMNO; Fiat etiam in trunco, ſuper baſi KO, & eiuſdem altitudinis BG, Conus KGO; Eſt igitur ſicut KB ad MG, ita BD ad GD; ſunt enim priores & ſecundi inter ſe æquales. Compoſitum igitur ex BD, GD, & DR, eſt compoſitum ex tribus proportionalibus in ratione KB ad MG, quarum maior eſt linea BD: Truncus igitur KMNO, eſt ad

Conum



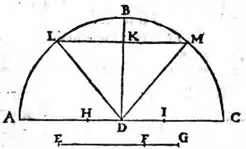
16. huius Conum K G O ſicut B D & G R ſimul tanquam vna
7. huius. ad B D. Eſt autem truncus K M N O æqualis exceſſui quo Cylindrus K L, excedit portionem E B F; exceſſus itaque Cylindri ſupra portionem E B F ad Conum K G O, eſt ſicut B D, G R, tanquam vna ad B D. Conus autem K G O, cum ſit tertia pars Cylindri K L,
Per 10. Euclidis 12. libri. eſt dimidium Cylindri I P. Cylindrus autem I P æqualis eſt ſectori E B F D. Igitur Conus K G O eſt dimi-
Conus K G O æqualis dimidio Cylindri I P. dium ſectoris E B F D. Habet itaque exceſſus Cylindri K L ſupra portionem E B F, ad totum ſectorem E B F D, rationem quam habent B D, G R, tanquam vna ad duplam B D, hoc eſt ad diametrum baſis he-
Per 1. & 9. huius. miſphærij: Sed Cylindrus K L, eſt ſeſquialter Sectoris E B F D; hoc eſt eum excedit vnâ tertiâ parte ſui, nimirum quantitate Coni K G O; Reliquum igitur Cylindri K L, deducto Cono K G O, æquale eſt ſectori E B F D. Exceſſus itaque Cylindri K L, ſupra conum K G O & portionem E B F, hoc eſt pars illa notata literis M K G O N, æqualis eſt Cono E D F;
Sequitur ex 7. huius ſed intra demóſtrabitur. pars enim Cylindri K L notata literis K E M N O L æqualis eſt portioni E B F; cum ſit exceſſus Cylin-

dri KL ſupra truncum Coni KMNO.

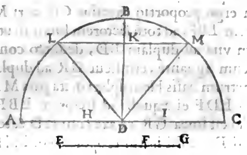
Cùm ergo proportio exceſſus Cilyndri KL ſuper portionem EBF, ad totũ ſectorem fuerit ſicut BD, GR tanquam vna ad duplam BD; deducto cono KGO & BD eum ſignante, erit ſicut GR ad duplam BD, vel diametrum baſis Hemiſphærij, ita pars MKGON vel conus EDF ei æqualis ad ſectorem EBFD: Sed compoſita eſt linea GR ex axe coni GD & tertia proportionali DR. Eſt igitur proportio coni ad ſectorem ſuum eadem quæ demoſtranda erat.

PROPOSITIO XVIII.

Inuenire Sectorem qui maior ſit cono ſuo in datâ proportione.



Sit hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD, proportio autem data EF ad FG, in qua ſector debeat eſſe ad conum ſuum: Fiat igitur ſicut EF ad FG, ita AC diameter baſis Hemiſphærij ad HC; & datâ AD primâ, & HC aggregato ſecundæ ac ter- 15. huius.



tiæ, diuidatur HC in puncto I, vt ſit ſicut AD ad HI, ita HI ad IC. Iam in axe DB fiat DK æqualis HI, & per punctum K tranſiet planum baſi AC parallelum, faciēs ſegmentum in hemiſphærio in L & M, ductiſque lineis LD, & MD, intelligatur in hemiſphærio ſector LBMD, cuius conus ſit LDM. Dico Sectorem LBMD ſe habere ad conum ſuum LDM, ſicut linea EF ad FG lineam.

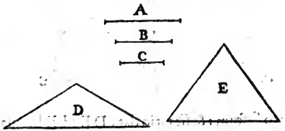
Cum enim AD & BD ſint æquales, & KD & HI, erunt BD, KD, & IC, continue proportionales; Conus vero LDM ſe habet ad ſectorem ſuum LBMD, ſicut axis coni KD, & IC tertia proportionalis ad BD & KD, ſimul ſumpti habent ad diametrum baſis Hemiſphærij AC, hoc eſt ſicut HC, ad AC: Facta eſt autem ſicut EF ad FG, ita AC ad HC; eſt igitur ſicut EF ad FG ita ſector LBMD ad conum ſuum LDM, quod erat propoſitum.

per 17. huius.

LEM-

LEMMA.

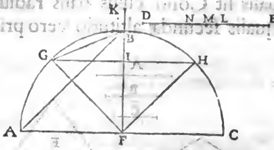
Si ſint tres lineæ continue proportionales: Dico quod Conus cuius baſis radius ſit æqualis primæ, altitudo vero tertiæ, æqualis ſit Cono cuius baſis radius ſit æqualis ſecundæ altitudo vero primæ.



SInt tres lineæ continuè proportionales A, B, & C, & fiant duo coni D, & E; & coni quidem D ſit linea A radius baſis & altitudo linea C: Coni vero E, ſit linea B radius baſis, & altitudo linea A: Dico quod iſti duo coni D & E ſint æquales: baſis enim coni D cuius radius linea A ad baſim coni E, cuius radius B, eſt ſicut linea A, ad lineam C, ſunt enim circuli, & ideo in dupla ratione radiorum ſuorum: altitudo vero coni D, eſt linea C, & altitudo coni E, eſt linea A; & ideo reciprocantur eorum baſes & altitudines; æquales ſunt igitur coni D, & E. 15. duodecimi.

PROPOSITIO XIX.

Inuenire Sectorem ad Portionem ſuam in data ratione maiori.



ESto factum: & ſit ratio data D E ad E L, quam habeat in Hemiſphærio A B C, ſector G B H F ad Portionem ſuam G B H. Et quoniam rectangulum ex peripheria Circuli facti ex radio B F tanquam recta in radium B F, æquale eſt duplæ baſis hemiſphærij, hoc eſt Circulo ex radio A B, vel ſuperficiei ſphæricæ hemiſphærij (quod manifeſtum eſſe debet ex iis quę ab Archimede demonſtrata ſunt in libris de dimenſione Circuli & de ſphæra & Cylindro:) ſuperficies vero Portionis G B H, æqualis eſt circulo ex radio G B, & in ratione ad ſuperficiem hemiſphærij ſicut B I ad B F; erit igitur rectangulum ex peripheria circuli ex radio A F tanquam recta in lineam B I æquale ſuperficiei portionis G B H: eidem etiam ſuperficiei æquale eſt re-

Per 3. huius.

Per 4. huius.

ctangu-

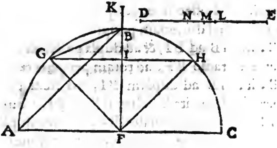
ctangulum ex GB in dimidiam peripheriam ſuam tanquam rectam; & ideo ſicut peripheria maximi circuli ex radio BF, ad dimidiam peripheriam circuli ex radio GB, ita GB ad BI, & ad dupla poſteriorum, ſicut peripheria ex radio BF, ad totam peripheriam ex radio GB, ita GB ad duplam BI; ſed ſicut peripheria ad peripheriam, ita ſe habet BF ad BG: Sunt igitur tres lineæ proportionales BF, BG & dupla BI; Conus itaque ex radio baſis BF, & altitudine dupla BI, æqualis eſt Cono ex radio baſis BG, & altitudine BF: Sed Circulus ex radio AB, duplus eſt circuli ex radio BF. Erit igitur Conus ex baſi cuius radius AB, hoc eſt ex ſuperficie hemiſphærij & altitudine BI, æqualis Cono ex baſi, cuius radius BF, & altitudine dupla BI; & ideo æqualis Cono ex radio baſi GB, hoc eſt ſuperficie ſectoris; & altitudine BF, hoc eſt Sectori GBHF.

Archim. de dimenſione circuli.

Per præcedens Lemma.

Cum autem Rhombus æqualis Sectori GBHF ſupponatur habere axem ſuum diuiſum in ratione data DE ad LE; Sit KF axis Rhombi quæſiti; & quoniam conſiſtit ex duobus Conis ſuper eadem baſi, quorum alter æqualis eſt Portioni, & totus æqualis Sectori; erit axis KF, ad partem KI, ſicut ſector GBHF, ad portionem GBH. Accipiatur itaque linea DE pro axe Rhombi; quâ diuiſâ bifariam in M, fiat DM prima, & DL aggregatum ſecundæ & tertiæ; iterum diuidatur DL in N, vt ſint DM, DN, & NL, tres lineæ continue proportionales. 15. huius.

Diuidatur itaque axis Hemiſphærij ABC in puncto I, vt ſit BF ad IF, ſicut DM ad DN; & per I,



agatur planum baſi AC parallelum, & ab interſe-ctione plani cum hemiſphærio; ad centrum F ducantur lineæ, conſtituentes in Hemiſphærio Sectorem GBHF, & portionem GBH. Dico quod Sector GBHF ſit ſector quæſitus, & quod habeat ad Conum ſuum GBH rationem quam habet DE ad LM.

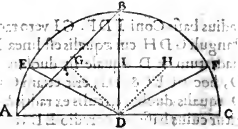
Quoniam enim DM, DN, & NL, ſunt continue proportionales, linea vero DE, eſt dupla lineæ DM; erit ſicut DE ad DL, ita Sector ad Conum ſuum; factum eſt autem ſicut MD, ad ND ita BF ad IF, igitur ſicut ED duplum MD ad ND, ita AC, duplum axis BF ad IF; & ad IF vna cum tertia proportionali ad BF & IF, ſicut DE, ad LD: Eſt igitur Sector GBHF, ad Conum GFH, ſicut DE ad DL, & ad portionem GBH, ſicut DE ad LE, quod faciendum erat.

per 18. huius.

PRO-

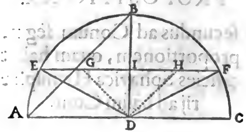
PROPOSITIO XX.

Sector ſecundus ad Conum ſegmenti habet proportionem, quam habet ſuperficies Sphærica Hemiſphærij ad baſim Coni.



SIt Hemiſphærium ABC, Centrum baſis D, axis BD, in quo punctum I, per quod ſecetur plano baſi AC parallelo, faciente in Hemiſphærio ſegmentum AEFC; in quo ſit Sector ſecundus AEDFC, & conus EDF. Dico quod Sector ſecundus AEDFC, ſit ad conum EDF, ſicut ſuperficies Sphærica Hemiſphærij ABC, ad circulum circa EF baſim Coni EDF: vel ſicut quodratum ex AB ad quadratum ex EI.

Conſtituatur igitur circa axem ſegmenti ID conus rectangulus GDH; & quoniam demonſtratum eſt 10. huius quod Conus EDF, vnâ cum cono rectangulo GDH, æquales ſint dimidio ſectoris AEDFC; erunt bis ſumpti æquales toti ſectori AEDFC: Cum igitur



EI, ſit radius baſis Coni EDF, GI vero radius baſis Coni rectanguli GDH, cui æqualis eſt linea ID; cum etiam quadratum ED æquale ſit duobus quadratis EI & ID, hoc eſt EI & IG; erit etiam Circulus ex radio ED æqualis duobus circulis ex radijs EI, & IG. Conus igitur cuius baſis eſt ex radio ED, altitudo vero ID, æqualis eſt duobus Conis, ſcilicet EDF ſegmenti, & Cono rectangulo GDH, hoc eſt dimidio ſectoris ſecundi. Sed cum quadratum ex AB ſit duplum quadrati ex AD vel ED, ſi ex illo vt radio factus fuerit Circulus pro baſi Coni, & conſtituatur in eadem altitudine (ſcilicet ID) Conus, erit ille duplus coni ex radio ED, & proinde æqualis Sectori ſecundo AEDFC. Sed Coni quorum eadem altitudo, ſunt inter ſe ſicut baſes, baſes vero cum ſint circuli, ſicut quadrata radiorum; Eſt igitur ſicut quadratum AB, ad quadratum EI, ſic ſector ſecundus AEDFC, ad conum EDF. Circulus autem ex radio AB, æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ hemiſphærij ABC; & circulus ex radio EI, eſt baſis coni. Igitur ſicut ſuperficies

10.huius.

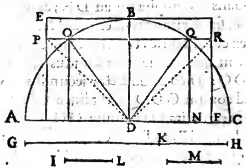
11.duodecimi.

ſphæ-

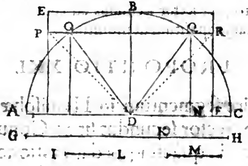
ſphærica hemiſphærij ABC, ad baſim coni EDF in ſegmento; ita ſector ſecundus ad conum ſegmenti. Quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO XXI.

Inuenire ſegmentum in Hemiſphærio, in quo Sector ſecundus ſit ad Conum ſegmenti in quâcunque datâ ratione poſſibili: Oportet autem quod ſit in maiori quam duplâ ratione.



ESto Hemiſphærium ABC, centrum D, & axis BD, & Cylindrus EF æqualis Hemiſphærio ABC, & eiuſdem altitudinis; & data ſit proportio GH, ad IL, in quâ conſtituendus ſit ſector ſecundus in ſegmento, ad conum eiuſdem ſegmenti: GH autem debet eſſe maior quam dupla IL. Secetur iam GH in puncto K, vt ſit KH, tertia pars ipſius GH:



& inter KH, & IL, cadat linea M media proportionalis, & fiat ſicut KH ad M, ita DF radius baſis Cylindri æqualis Hemiſphærio ad DN; & ſuper baſi ex radio DN, fiat Cylindrus inſcriptus Hemiſphærio qui ſit ON, ex cuius fabricâ etiam factum ſit ſegmentum AOQC, in quo fiat ſector ſecundus AODQC, & conus ODQ: Dico quod ſector ſecundus AODQC ſe habet ad conum ODQ, ſicut linea GH ad lineam IL: Producatur itaque planum OQ, vſque dum ſecet Cylindrum EF, in P, & R; & ſit conus PDR.

Cum igitur factum ſit ſicut KH ad M, ita DF ad DN; erit conus PDR ad conum ODQ, ſicut KH ad IL, hoc eſt in duplicatâ ratione KH, ad M; Cylindrus autem PF, eſt triplus coni PDR; quare etiam eſt ad conum ODQ, ſicut tripla KH, hoc eſt GH ad IL; Cylindrus vero PF, eſt æqualis ſectori ſecundo AODQC. Igitur ſector ſecundus ad conum ODQ in eodem ſegmento, eſt ſicut GH ad IL. quod faciendum erat.

9. huius.

SCHO-

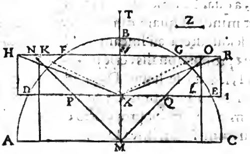
SCHOLIVM.

Notandum autem eſt quod I L poſſit eſſe maior quàm K H; & forſàn ideò dicat aliquis quod media proportionalis M, poterit excedere ſemidiametrum D C, quare punctum N cadere poteſt extra hemiſphærium: quod fieri non poſſe ſic oſtendo. Supponatur I L, æqualis dimidiæ G H, (propoſitio tamen requirit vt minor ſit quam dimidia) & erit tunc I L in ratione ſeſquialterâ ad lineam K H, & linea M, quæ eſt media proportionalis, erit potentiâ ſeſquialtera ipſius K H; ſed ita ſe habet D C, ad D F; quare cadet punctum N in punctum C: Si igitur minor ſit I L, quam dimidia G H, vt propoſitio exigit, cadet neceſſario punctum N, in linea D C.

PROPOSITIO XXII.

Si Hemiſphærium ſectum fuerit duobus planis ad baſim hemiſphærij parallelis, ſegmentum interceptum inter ea plana habet eam proportionem ad partem Cylindri æqualis Hemiſphęrio inter eadem plana interceptam, quam exceſſus maximæ trium proportionalium (quarum media eſt axis Hemiſphærij, minor vero pars axis intercepta inter baſim &

planum ſuperius) ter ſumptæ, ſupra tres proportionales (quarum maior eſt eadem priorum minor, ſcilicet à centro ad planum ſuperius, media à centro ad planum inferius, & tertia minor ad eas, habet ad maximam priorum bis ſumptam.



ESto ſiquidem Hemiſphærium ABC; in quo ſint duo plana DE & FG ſecantia Hemiſphærium, & ad baſim AC parallela, quæ faciant in Hemiſphærio ſegmentum interceptum DFGE; & productis planis, facti ſint Cylindri circa eundem axem ſegmenti VX, ſcilicet HI, ſuper baſi æquali baſi Hemiſphærij, & KL, ſuper baſi ſubſeſquialtera ad baſim hemiſphærij, qui pars eſt Cylindri æqualis Hemiſphærio; & a centro M baſis Hemiſphærij ductis lineis MN, & MO, conſtituentibus in centro M conum rectangulum NMO, & ſecantem planum DE, in P, & Q; vnde inter plana eadem parallela factus eſt etiam trun-

tus coni NPQO: Ductus iam axis MB, ſectuſque planis per puncta X, & V, producatur, & fiat ſicut VM ad BM, ita BM ad TM; & iterum ſicut VM ad XM, ita XM ad lineam Z; Dico quod erit ſicut exceſſus triplæ TM ſupra VM, XM, & Z, ad duplam TM, ita ſegmentum DFGE, ad Cylindrum KL, ideſt ad ſectorem, cuius ſuperficies ſphærica eſt eadem quæ ſuperficies ſegmenti DFGE. Ducantur enim lineæ NX, OX, conſtituentes conum NXO. 9. huius,

Cum igitur Truncus NPQO, ſit ad conum NXO, ſicut tres proportionales in ratione NV ad PX, ad maximam trium; NV vero æqualis ſit VM; PX vero XM, erit truncus NPQO, ad conum NXO; ſicut aggregatum ex VM, XM & Z, ad VM; Cum autem HV ſit ad NV, ſicut BM ad VM, (ſunt enim æquales HV, & BM, NV, & VM:) Conus HXR erit ad conum NXO, in duplicatâ ratione BM ad VM, hoc eſt ſicut TM ad VM; & ideo exceſſus Cylindri HI, ſupra ſegmentum DFGE (æqualis eſt enim dictus exceſſus trunco coni NPQO) eſt ad conum HXR, ſicut VM, XM, & Z, ad TM. Sed cum conus HXR, ſit æqualis dimidio Cylindri KL; erit exceſſus prædictus ad Cylindrum KL, ſicut VM, XM, & Z, ad duplam TM. Sed truncus coni, cum ſit æqualis exceſſui Cylindri HI ſupra ſegmentum DFGE, erit vnà cum ſegmento DFGE, æqualis Cylindro HI; & ideo triplus coni HXR: Exceſſus igitur tripli coni HXR ſupra truncum coni, hoc eſt ſegmentum DFGE, eſt ad duplum coni HXR, hoc eſt Cylindrum KL, ſicut exceſſus triplæ TM, ſupra

16. huius

7. huius.

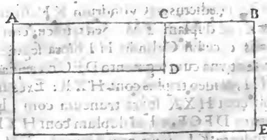
ex 17. huius.

VM,

V M, X M, & Z. ad duplam T M. Sed linea T M eſt maxima trium proportionalium, quarum prima eſt linea intercepta inter centrum & planum ſuperius, & ſecunda eſt axis hemiſphærij; tres vero reliquæ proportionales ſcilicet V M, X M, & Z, quarum prima eſt etiam minor prioribus, linea videlicet a centro ad planum ſuperius, ſecunda X M, a centro ad planum inferius, & Z ad eas tertia proportionalis. Linea vero T M ter ſumpta, deſignat truncum coni vna cum portione D F G E; tres autem reliquæ proportionales deſignant truncum coni; & T M dupla deſignat Cylindrum K L, cuius baſis eſt ſubſeſquialtera ad baſim Hemiſphærij. Si igitur Hemiſphærium &c.

COROLLARIVM.

Ex hoc elicitur proportio Segmenti intermedij D F G E, ad hemiſphærium A B C, quæ componitur ex proportione ſegmenti D F G E ad Cylindrum K L, & Cylindri K L ad Hemiſphærium; Cylindrus vero K L ſe habet ad Hemiſphærium ſicut axis eius V X, ad axem hemiſphærij B M. Fiat igitur linea A B,

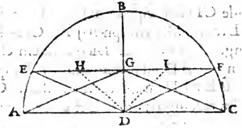


æqualis duplæ TM; & ſit AC æqualis exceſſui quo tripla TM excedit tres proportionales VM, XM, & Z; deinde CD fiat æqualis axi VX ſegmenti DFGE, & BE, axi BM hemiſphærij ABC: ex his fiant duo rectangula AD & AE: Dico eandem eſſe rationem rectanguli AD ad rectangulum AE, quæ ſegmenti DFGE ad Hemiſphærium ABC. Componuntur enim rectangula AD, & AE, ex eiſdem proportionibus quibus componuntur ſegmentum, & Hemiſphærium, & ideo in eadem ratione ſunt.

PROPOSITIO XXIII.

Segmentum Hemiſphærij inter baſim, & planum parallelum baſi interceptum, æquale eſt tribus conis eiuſdem cum ſegmento altitudinis quorum duo ſunt ex baſi maiori reliquus vero ex baſi minori.

SEcetur vtcunque hemiſphærium ABC, plano EF, baſi AC parallelo, & in ſegmento fiat conus EDF, & iterum ſuper baſi AC, conſtituatur alius AGC, circa eundem eorum axem communem GD, qui etiam axis eſt ſegmenti AEFC. Dico quod conus AGC bis, vnà cum cono EDF ſimul ſumpti, æquales ſint ſegmento AEFC.

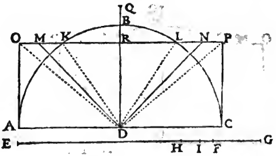


Cum enim demonſtratum ſit quod conus E D F,
per 10. huius. vna cum cono rectangulo (qui ſit H D I) æquales ſint
dimidio ſectoris ſecundi; demonſtratum etiam ſit quod
conus ex radio E D, vel quod idem eſt ex radio A D,
per 20. huius. æqualis ſit duobus conis eiuſdem altitudinis, videlicet
ex radijs E G, & H G, & ideo æqualis dimidio ſectoris
ſecundi inter eadem parallela plana: eſt igitur conus
A G C, ex baſe maiori ſegmenti, æqualis dimidio ſectoris
ſecundi A E D F C; Conus igitur A G C bis ſumptus,
vnà cum cono ſegmenti E D F ſimul, æqualis eſt toti
ſegmento A E F C: Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXIV.

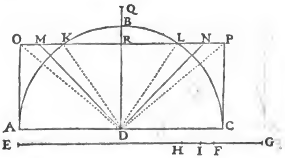
Segmentum in Hemiſphærio conſtituere, quod habeat ad conum rectangulum eiuſdem altitudinis proportionem datam. Proportio autem debet eſſe maior quam dupla.

Digitized by Google



SIt Hemiſphærium ABC; centrum D, axis BD, & ſit ratio data EF ad FG, quam habere debeat ſegmentum ad conum rectangulum eiuſdem altitudinis. Cum autem FG minor ſit quam tertia pars lineæ totius EG, diuidatur ita in puncto H, vt ſit GH, tertia pars EG, & inter FG, & HG, cadat media proportionalis IG: Similiter etiam diuidatur axis Hemiſphærij BD in R, vt ſit ſicut IG ad FG, ita BD ad RD; & per punctum R, agatur parallelum planum ad baſim AC, faciens ſegmentum in Hemiſphærio AKLC. Fiat etiam inter eadem plana, (producta ſi opus ſit) conus rectangulus MDN circa eundem axem RD, & Cylindrus OC, ſuper baſi Hemiſphærij AC. Fiat etiam ſicut RD ad BD, ita BD ad QD, & conſtitutis conis ODP, & KDL; Dico, ſegmentum AKLC ad conum rectangulum MDN, habere rationem, quam habet linea EF ad lineam FG.

Cum enim conus ODP ad conum rectangulum MDN ſit in duplicatâ ratione lineæ OR ad lineam MR, vel quod idem eſt axis BD ad RD; eſt igitur



Conus ODP ad conum MDN; ſicut linea QD ad RD; Sed Cylindrus OC eſt triplus coni ODP, & 5. huius. exceſſus Cylindri OP ſupra ſegmentum AKLC, eſt æqualis cono rectangulo MDN; Cylindrus igitur OC ad exceſſum ſuum ſupra ſegmentum AKLC, eſt ſicut tripla QD ad RD; Hic vero Cylindrus OC, ad ſectorem ſecundum AKDLC, eſt ſicut tripla QD 23. huius. ad duplam QD; demonſtratum eſt enim quod Sector ſecundus æqualis ſit duplo coni ODP; Sector igitur ſecundus eſt ad exceſſum Cylindri OC ſupra ſegmentum, ſicut dupla QD ad RD. Sed conus ODP; cum ſit dimidium Sectoris ſecundi AKDLC, æqualis eſt duobus conis KDL, & MDN. Sector igitur ſecundus vna cum cono KDL hoc eſt ſegmentum, eſt ad conum rectangulum MDN, vel ad exceſſum Cylindri ſupra ſegmentum notatum literis AOKLPC, ſicut dupla QD, vnà cum parte QR, eſt ad RD: pars igitur QR ſignat conum ſegmenti KDL. Sed factæ ſunt QD, BD & RD, in eadem ratione ſicut HG IG, & FG; eſt igitur ſicut QD ad RD, ita HG ad FG;

&an-

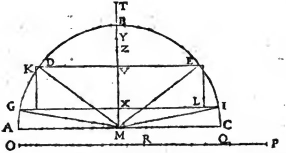
& antecedentium tripla, hoc eſt ſicut triplum QD ad RD, ita EG ad FG, & diuidendo ſicut duplum QD cum QR ad RD, ita EF ad FG, igitur duplum QD ſcilicet duo coni ODP, cum QR cono ſegmenti KDL, hoc eſt ſegmentum AKLC ad RD, conum rectangulum MDN, ſe habet ſicut linea EF ad FG. Factum eſt igitur in Hemiſphærio ſegmentum, ad conum rectangulum eiuſdem altitudinis in ratione datâ EF ad FG, quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXV.

In Hemiſphærio inuenire ſegmentum intermedium, cuius exceſſus ſupra Sectorem ſecundum eiuſdem ſuperficiei ſphęricæ, ſit in ratione datâ ad prædictum Sectorem ſecundum: ratio autem debet eſſe minor quam ſubdupla.

Sit proportio data OP ad QP, quam habere debeat Sector ſecundus ad exceſſum quo a ſegmento excedatur; QP ergo minor debet eſſe quàm dimidia OP. Super plano igitur AC, a puncto M, erigatur perpendicularis MT, & fiat ſicut dimidia OP, ſcilicet RP ad PQ, ita MT ad TY: Sumpto etiam in linea MY, puncto V vtcunque (dummodo MV maior ſit tertiâ parte lineæ MY) fiat MB media proportionalis inter MV, & MT, & facto radio MB, fiat Hemiſphærium ABC: Iterum datâ trium propor-

15.huius. tionalium primâ M V, & aggregato reliquarum V Y; inueniatur punctum Z, vt ſint M V, V Z, & Z Y, continue proportionales. Iam a centro M fiat M X æqualis V Z, & per X & V puncta, agantur plana baſi A C parallela ſecantia hemiſphærium A B C, in punctis G, D, E, I, vnde fit ſegmentum intermedium G D E I; ducantur etiam ad centrum M lineæ G M; D M, E M, & I M, ex quibus intelligatur deſignatus



Sector ſecundus G D M E I: fiat etiam Cylindrus K L, ſuper baſi ſubſeſquialtera ad baſim Hemiſphærij, circa eundem axem & inter eadem plana parallela interceptus.

Quoniam igitur Y M eſt aggregatum trium proportionalium, ſcilicet V M primæ, X M vel Z V ſecundæ, inter centrum M & duo plana parallela baſi, & Y Z ad eas tertiæ; ſunt etiam & aliæ tres, quarum V M prima, B M axis hemiſphærij ſecunda, & T M ad eas per 22.huius. tertia; erit ſicut exceſſus triplæ T M ſupra Y M, ad duplam T M, ita ſegmentum G D E I, ad Cylindrum K L, hoc eſt ad Sectorem ſecundum G D M E I. Sed

ſi ex

ſi ex tripla T M ſubtracta fuerit Y M, reliqua erit dupla T M vna cum parte T Y. Eſt igitur proportio ſegmenti ad Sectorem, ſicut duplæ T M vna cum parte T Y ad duplam T M. Exceſſus itaque eſt pars T Y, quæ ad duplam T M habet eandem rationem quam habet Q P ad P O; & conuertendo erit ſicut Sector ſecundus ad exceſſum quo ſegmentum excedit eum, ita O P ad P Q, quod faciendum erat.

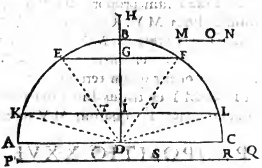
Quod autem oporteat M V eſſe maiorem quam tertia pars lineæ M Y, ſequitur ex eo quod M V debeat eſſe maxima trium proportionalium, quarum aggregatum eſt linea M Y. Cum enim M V ſit linea a centro ad planum ſuperius, M X vero quæ a centro ad planum inferius, neceſſario minor erit M X quam M V; & ideo maior erit quam tertia pars lineæ M Y, cum tota linea M Y ex tribus lineis inæqualibus, & proportionalibus facta ſit, quarum M V maxima.

PROPOSITIO XXVI.

Si Hemiſphærium ſectum fuerit plano ad baſim parallelo, ita vt totus axis non ſit potentiâ triplus partis inferioris, ſed vel maior vel minor, iterum ſecare Hemiſphærium plano parallelo, ita vt ſegmentum interceptum ſit æquale Sectori ſecundo eiuſdem cum ſegmento ſuperficiei ſphæricæ.

Sit

SIt Hemiſphærium ABC, cuius centrum D, axis BD, ſectus plano per punctum G ad baſim parallelo, faciente ſectionem EF, & non ſit quadratum ex BD, triplum quadrati ex GD, ſed vel maius vel minus. Sit vero iam minus; & fiat ſicut GD ad BD, ita BD ad HD. Inuentæ itaque lineæ HG, quæ eſt exceſſus quo linea HD ſuperat lineam GD, fiat æqualis recta MN, & diuidatur ſic in puncto O, vt ſit ſicut GD ad MO, ita MO ad ON; & in axe factâ ID æquali MO, per I ducatur aliud planum baſi AC



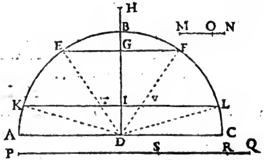
parallelum, includens ſegmentum KEFL, ductiſque lineis ad centrum KD, ED, FD, & LD, Dico quod ſegmentum KEFL eſt æquale Sectori ſecundo KEDFL. Cum enim demonſtratum ſit, quod ſegmentum intermedium KEFL ſe habeat ad Sectorem ſecundum KEDFL, ſicut exceſſus triplæ HD ſupra tres proportionales, quarum GD prima, & ID ſecunda, hoc eſt ſupra aggregatum ex GD & MN, (ſic enim per conſtructionem factum erat) ad duplam HD: exceſſus vero triplæ HD ſupra tres illas propor-

tionales (hoc eſt ipſam HD) ſit dupla HD, quæ ſe habet ad eandem duplam HD, ſicut ſegmentum KEFL ad Sectorem ſecundum KEDFL: æquale eſt igitur ſegmentum KEFL Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ, quod faciendum erat.

Si autem Hemiſphærium ſectum fuerit in I, vt quadratum axis BD ſit maius triplo quadrati partis ID, plano KL per punctum I ducto, inuenietur punctum G hoc modo: Sit vtcunque linea PQ, quæ diuidatur ſic in puncto R, vt ſit ſicut quadratum BD ad quadratum ID, ita linea PQ ad QR: data iam RQ prima, & PR aggregato ſecnndæ ac tertiæ, diuidatur ita PR in puncto S, vt ſint PS, SR, RQ, in continuâ ratione.

Quoniam enim rectangulum ex HD, GD, æquale eſt quadrato BD; rectangulo etiam ex GD, ON, æquale eſt quadratum ex ID: rectangula autem, cùm habeant latus commune GD, ſint inter ſe ſicut reliqua latera, videlicet HD & ON; quadrata igitur ex BD, & ID, cum ſint predictis rectangulis æqualia, ſunt inter ſe in eadem ratione, ſcilicet ſicut linea HD, ad lineam ON: Iterum cum linea HD, compoſita ſit ex lineis HG, & GD, lineæ vero HG, per conſtructionem æqualis ſit MN, compoſita igitur ex GD & MN, æqualis erit lineæ HD; ſed ratio PQ ad QR eſt quadrati BD ad quadratum ID, hoc eſt lineæ HD, ad lineam ON; erit itaque & compoſita ex GD & MN, ad ON, ſicut PQ ad QR: Cum igitur linea HD, vel compoſita ex GD, & MN, ſit aggregatum trium proportionalium; ſit etiam linea PQ

aggre-



aggregatũ trium proportionalium; & habeant ad minores earum eandem rationem, ſcilicet linea PQ ad QR, eandem rationem, quam habet compoſita ex DG & MN, ad ON; Sequitur quod diuiſæ ſingulæ proportionalium viciſſim ſumptæ, eandem rationem habebunt; ſcilicet quod prima priorum ad ſecundam earum, habeat eandem rationem quam habet poſteriorum prima, ad ſecundam poſteriorum, & ſic in reliquis; Vnde ſequitur quod ſicut QR ad RS, ita ON ad MO, vel ID; & ſicut RS ad SP, ita DI ad DG. Data autem eſt linea DI, & ratio RS ad SP; & ideo data eſt linea DG, & punctum G, per quod tranſire debet planum EF.

Per 17. 5. Eucl.

Ducatur itaque planum EF per punctũ G, ad baſim AC parallelum, & erit factum ſegmentum KEFL, quod iam demonſtrauimus eſſe æquale Sectori ſecundo KEDFL, quod faciendum erat.

Digitized by Google

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis apparet quod conus E D F æqualis ſit cono K D L. Signetur enim conus E D F, in interſectione cum plano K L, literis T, V; cum igitur Sector ſecundus K E D F L æqualis ſit ſegmento K E F L; erit truncus E F V T æqualis parti K T D V L Sectoris ſecundi, quibus ſi addatur conus vel coni pars communis T D V, erit totus conus E D F, cono K D L æqualis. I.

Ex quo etiam ſequitur, quod ſi detur vtcunque conus in Hemiſphærio, qui non ſit maximus, alius ei æqualis in eodem Hemiſphærio conſtitui poteſt. II.

Apparet etiam ratio, quare ſi axis ſectus fuerit in ratione tripla quadrati totius ad quadratum partis inferioris, non poſſit iterum ſecari, vt ſit ſegmentum æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ; quoniam in illo caſu conus ſegmenti eſt maximus conorum inſcriptibilium in Hemiſphærio, vnde ei non poteſt alius conſtitui æqualis: Manifeſtum eſt enim quod neceſſario ſint duo coni æquales, quãdo ſegmentum eſt æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ; vti iam probatum eſt. III:

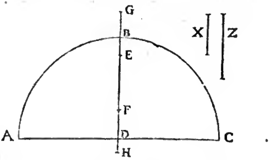
Huiuſmodi etiam ſegmento intermedio, cui Sector ſecundus eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ æqualis eſt, Sector etiam primus ei æqualis datur: ductis enim a polo B lineis B K & B E, ſi ex quadrato B K ſubducatur quadratum B E, reliqui quadrati latus erit radius Sectoris primi qui dicto ſegmento æqualis erit. IV.

V. Obſeruandum etiam eſt quod in triangulis KID, & EGD, ex quorum reuolutione fiunt duo coni æquales EDF, & KDL, quadrata laterum KI & ID, ſimul ſumpta, æqualia ſunt quadratis duorum laterum EG & GD; latus vero GD ad latus ID, eſt in duplicatâ ratione lateris KI ad latus EG, quod manifeſtum eſt ex eo quod coni inter ſe ſint æquales. Si igitur propoſitum fuerit, dato triangulo rectangulo, inuenire aliud cuius laterum quadrata circa angulum rectum ſint ſimul ſumpta æqualia quadratis duorum laterum trianguli dati circa angulum rectum; & quod ratio quam habet vnum latus circa angulum rectum prioris trianguli ad vnum ſimile latus poſterioris, dupla ſit rationis quam habet reliquum poſterioris ad reliquum prioris trianguli circa eundem angulum rectum: Hoc efficietur (ſicut apparet ex huius propoſitionis demonſtratione) ex æqualitate conorum in Hemiſphærio inſcriptorum.

PROPOSITIO XXVII.

Segmentum intermedium in datâ ratione ad Hemiſphærium exhibere.

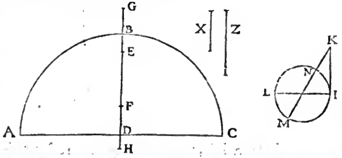
Sit ratio data quam habet X ad Z, & ſupponatur factum; & ſit EF axis ſegmenti intermedij æqualis Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ, in ratione ad BD axẽ Hemiſphærij, ſicut linea X ad lineã Z; & ſint continue proportionales ED, BD & GD, & iterum ED, FD & DH: & quoniã nota eſt proportio quadrati



BD ad quadratum EF, nota eſt proportio rectanguli GDE ad quadratum EF; rectangulum autem ex GD in ED, æquale eſt quadrato ED, vnà cum rectangulo ex GE in ED, hoc eſt ex FH in ED, cùm FH & GE ſint æquales; rectangulum autem ex FH in ED, æquale eſt duobus rectangulis, ſcilicet ex ED in DH, & ex ED in DF. Sed rectangulum ex ED, FD, æquale eſt rectangulo EFD vnâ cum quadrato FD, & rectangulum EDH æquale eſt eidem quadrato FD; Eſt igitur rectangulum ex GE in ED, æquale rectangulo ex EF, FD, vnà cum duobus quadratis ex FD. Quadratum vero ex ED æquale eſt quadrato ex EF & quadrato ex FD, cum duobus rectangulis EFD; Quadratum igitur ex BD, æquale eſt quadrato ex EF, vnà cum tribus rectangulis ex EF, & FD, & tribus quadratis ex FD: Tertia pars igitur exceſsûs quadrati BD ſupra quadratum EF, eſt rectangulum ex EF, FD, vnâ cum quadrato FD, hoc eſt rectangulum ex ED, FD. Sed datus eſt exceſſus quadrati BD ſupra quadratum EF (data eſt enim ratio EF ad BD, ſcili-

Per conſtructioné 28. huius.

cet X ad Z:) igitur & tertia pars eius data eſt. Componatur autem hoc modo.



Ex quadrato BD ſubtrahatur quadratum EF, cuius reſidui tertiæ parti æquale ſit quadratum ex IK; huic ad angulos rectos applicetur recta LI æqualis lineæ EF datæ, & ſuper lineam LI deſcribatur Circulus LNIM; Iam a puncto K extremitatis lineæ IK, ducatur recta KNM per centrum circuli ad peripheriam M; ſecans circulum in N; Et quoniam rectangulum ex MK in KN æquale eſt quadrato ex KI (tangit enim KI circulum LNIM:) quadratum vero ex KI per conſtructionem æquale eſt tertiæ parti exceſsûs quadrati BD, ſupra quadratum ex EF; cui etiam demonſtratum eſt rectangulum EDF eſſe æquale; 4. huius. æquale igitur eſt rectangulum MKN, rectangulo EDF. Sed facta eſt linea LI, æqualis lineæ EF; deductâ igitur LI vel MN ex MK, & EF ex FD, reliquæ NK & FD, æquales erunt; igitur tota MK, toti ED æqualis erit. Data ergo ſunt puncta F, E, in axe, & linea FE, cui in ratione X ad Z factus ſit axis.

Quoniam igitur ſegmentum intermedium inter

pla-

plana per puncta E & F æquale eſt ſectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ,(facta eſt enim G E æqualis F H) erit ſegmentum intermedium ad Hemiſphærium A B C, in eâdem ratione quâ axis E F ad axim B D : & ideo ſegmentum &c. 26. huius. per Corol. 9. huius ſecundã partem.

COROLLARIVM.

Hoc Problema, licet non ſit illud ab Archimede propoſitum libro ſecundo de ſphæra & Cylindro prop. 4. attamen eſt ſectio ſphæræ in ratione data, & a nullo quod ſciam Geometra hactenus demonſtrata: ex hoc enim, Segmentum intermedium ad Hemiſphærium in quâcunq. ratione conſtitui poteſt; & ad ſphæram in ratione minori quam ſubduplâ vel in quâcunque ratione datâ ad ſphæram duobus ſegmentis intermedijs, vti ex demonſtratis facile colligitur. I.

Hinc etiam conſequitur, quod ſi Cylindrus conſtituatur ſuper baſi hemiſphærij & in eo & eadem altitudine inſcriptus fuerit conus rectangulus inuerſe poſitus, & ſi per E & F ducta fuerint plana parallela ſecantia Cylindrum & conum rectangulum, quod conus ille rectangulus ſecabitur ſicut hemiſphærium, vt ſit pars eius intermedia inter plana parallela intercepta ad totum conum rectangulum, ſicut pars axis E F ad totum axem B D. II.

Quoniam enim pars illa Cylindri intercepta eſt ad totum Cylindrum, ſicut pars axis E F ad totum axem; & pars Hemiſphærij, hoc eſt pars exceſsûs Cylindri ſupra conum rectangulum inter eadem plana eſt ad to-

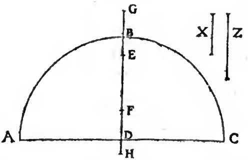
tum

tum exceſſum in eâdem ratione, ſcilicet E F ad B D; neceſſario ſequitur, quod erit etiam truncus coni intermedius ad totum conum in eâdem ratione: ſi enim ſit ſicut totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, erit etiam ita reliquum ad reliquum.

PROPOSITIO XXVIII.

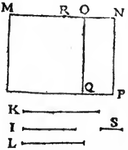
Datâ proportione partium axis interceptarum inter axem ſegmenti intermedij & centrum Hemiſphærij & eundem axem & polum eius, inuenire ſegmentum æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ.

REpetito diagrammate ſuperiore, ſit data proportio partis F D ad partem B E, eadem quæ lineæ K ad lineam I, & quoniam demonſtratum eſt in ſuperiore quod rectangulum ex G D in E D, hoc eſt quadratum B D, æquale ſit quadrato E D, vnà cum rectangulo ex E D in D F & quadrato D F; eſt autem quadratum ex B D, æquale rectangulo ex E D in B E bis, cum quadrato B E & quadrato E D; dempto itaque ex vtroque communi quadrato E D, remanebit rectangulum ex E D in D F, vnà cum quadrato ex D F, æquale rectangulo ex E D in B E bis, cum quadrato B E: quanto ergo quadratum D F excedit quadratum B E, tanto duo rectangula ex E D in B E excedunt rectangulum ex E D in D F. Sed quoniam



quantitas linearum BE & FD ignota eſt, nota autem eſt proportio earum; componatur ſic.

Ex quadrato lineæ K ſubducatur quadratum lineæ I, & reliqui quadrati latus ſit L: deinde fiat linea MN æqualis duplæ I, ex quâ, deductâ parte MO æquali lineæ K, (maior enim eſt dupla I quam linea K vt infra demonſtrabitur) reliquæ ON applicetur latus faciens rectangulum OP æquale quadrato ex L, & compleatur totum rectangulum MP.



Quoniã igitur MN æqualis eſt duplæ lineæ I, ex quâ deducta eſt linea MO æqualis lineæ K; & exceſſui ON applicata eſt linea faciens rectangulum OP æquale exceſſui quadrati K ſupra quadratum I; vnde etiam rectangulum MP, excedit rectangulum MQ eodem exceſſu quo quadratum K excedit quadratum I, erit ſicut rectangulum MQ ad rectangulum MP, ita in Hemiſ-

phærio

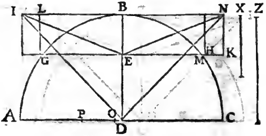
phærio rectangulum ex E D in D F, ad rectangulum ex E D in duplam B E.

Sed oſtendendum eſt etiam quod eadem ſit ratio N P ad dimidiam M N ; ſcilicet ad R N, quæ in Hemiſphærio F D ad E B; quod ſic oſtendo. Quoniam enim factæ ſunt in eâdem ratione F D ad E B, & M O ad M R, erunt & quadrata earum in eâdem ratione, ſcilicet quadratum ex F D ad quadratum ex E B, ſicut quadratum ex M O ad quadratum ex M R, & per conuerſionem rationis eadem etiam erit ratio quadratorum ad differentias eorum; quare & laterum, ſcilicet lateris F D ad latus, quod poteſt exceſſum quadrati F D ſupra quadratum E B ſicut latus M O ad latus quod poteſt exceſſum quadrati M O ſupra quadratum M R, hoc eſt ad lineam L. Sit igitur linea S, quæ poſſit exceſſum quadrati F D ſupra quadratum E B, quare linea S erit media proportionalis inter E D & exceſſum quo dupla E B ſuperat F D. Linea igitur S eſt ad lineam E D, ſicut L ad lineam N P; & S ad lineam B E, ſicut L ad lineam M R, ex æquali erit E D ad B E, ſicut N P ad M R. Sed E D & B E ſimul conficiunt axem B D; oportet igitur quod N P & M R ſimul ſumptæ conficiant etiam lineam in eâdem ratione ſectam ſicut B D axis in E. Igitur datum erit punctum in axe, per quod tranſire debet planum baſi parallelum, quod faciendum erat: reliquum punctum interſectionis in axe per 25. inuenietur.

PRO-

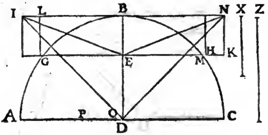
PROPOSITIO XXIX.

Portionem Hemiſphærij ad Cylindrum eiuſdem altitudinis, cuius baſis eſt ſubſeſquialtera ad baſim Hemiſphærij, in datâ ratione minore exibere.



SIt ratio dâta X ad Z. Oportet autem quod X ſit minor, cum portio hemiſphærij ſemper minor ſit quàm pars Cylindri æqualis Hemiſphærio circa eundem axem conſtituta. Sit etiam Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D. Diuidatur iam diameter baſis A C ita in O, vt ſit O C ad A C, ſicut X ad Z; fiatque B D prima, & A O aggregatum ſecundæ ac tertiæ, quæ diuidatur ita in P, vt ſit B D ad A P, ſicut A P ad P O; & a punctò D, in axe factâ D E æquali A P, per E punctum agatur planum baſi A C parallelum, ſecans Hemiſphærium in G & M facienſque portionem GBM: ducatur etiam per polum B, aliud pla- 15. huius.

num parallelum, & inter dicta plana, & circa axem BE, conſtituantur Cylindrus IK ſuper baſi æquali baſi Hemiſphærij, & Cylindrus LH ſuper baſi ſubſeſquialterâ ad baſim Hemiſphærij. Dico portionem GBM, ſe habere ad Cylindrum LH eiuſdem altitudinis, & ſuper baſi ſubſeſquialterâ ad baſim hemiſphærij, ſicut X, ad Z. Sit enim conus rectangulus IDN, & conus in Cylindro IEN.



Et quoniam truncus coni IFRN ſe habet ad conum IEN, ſicut ad maximam trium tres proportionales in ratione IB, ad FE: Sunt autem lineæ BD, AP, & PO, in eadem ratione. Trnncus igitur coni ſe habet ad conum IEN ſicut tres illæ proportionales hoc eſt BD & AO ad BD. Sed idem truncus æqualis eſt exceſſui, quo Cylindrus IK ſuperat portionem GBH. Portio igitur GBH eſt exceſſus Cylindri IK ſupra truncum Coni. Igitur ſe habet ad Conum IEN, ſicut exceſſus triplæ BD ſupra BD, AP, & PO, ad BD, & ad Cylindrum IK ſicut ad triplam BD. Sed Cylindrus IK eſt ſeſquialter Cylindri LH; ſe habet

16. huius.

Per 7. huius.

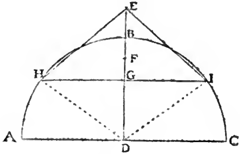
igi-

igitur ad Cylindrum L H, ſicut ad duplam B D: Exceſſus vero triplæ B D, ſupra B D, A P, & P O, idem eſt ac exceſſus duplæ B D, hoc eſt diametri A C ſupra A O, ſed exceſſus A C, ſupra A O, eſt linea O C, Portio itaque G B M ſe habet ad Cylindrum L H, ſicut O C ad A C, hoc eſt ſicut exceſſus trium proportionalium in ratione B D ad E D, vel I B ad K E; ſunt enim æquales duplæ maioris B D. Diuidatur itaque diameter baſis Hemiſphærij A C in puncto O, vt ſit O C ad A C, ſicut X ad Z; & factâ dimidiâ A C (hoc eſt B D) prima trium proportionalium, & A O aggrato reliquarum, & diuiſa A O in P, vt ſint B D, A P, P O in continuâ ratione, in axe B D fiat E D æqualis ſecundę proportionali A P, & ſi per E, ducatur planum baſi A C parallelum, diſſecabit Portionem G B H quæſitam, quæ ad Cylindrum L M, eiuſdem altitudinis & cõſiſtentem ſupra baſim ſubſeſqialteram ad baſim hemiſphærij, habebit proportionem X ad Z datam. 15. huius.

PROPOSITIO XXX.

Portio ſe habet ad conum ſuum ſicut exceſſus trium proportionalium ſupra minorem ter ad duplum exceſſum mediæ ſupra eandem minorem: & portio ſe habet ad Hemiſphærium, ſicut rectangulum ex terminis prædictis, ad rectangulum ex maximâ & mediâ propottionalium prædictarum.

SIt enim Hemiſphærium ABC, centrum D, axis DB, qui producatur in E, ſed non fiat BE maior BD demonſtrationis gratiâ in Hemiſphærio; Si vero maior fuerit, demonſtrationis tamen eadem erit ratio; ſed euadet figura in portionem maiorem Hemiſphærio, quod a propoſito noſtro alienum eſt: Fiat ideo



EB minor quam BD; & ſicut ED ad BD, ita ſit BD ad FD; Fiat etiam FG æqualis FB, & per punctum G ducatur planum HI, baſi AC parallelum; & a punctis H & I ad E ducantur lineæ, vnde concipiatur conus HEI, quem iam demonſtrabimus æqualem eſſe portioni HBI.

Cum enim per conſtructionem FG & FB ſint æquales; erit FD media in Arithmetica ratione inter BD & GD: & ideo æqualis erit dimidio aggregati ex BD & GD; quare erit ſicut aggregatum ex BD & GD ad duplam BD, ita FD ad BD, & BD ad ED; factæ ſunt enim per conſtructionem ED, BD, FD in
14. huius. eâdem ratione; & quadrata HB & HG etiam ſunt in eâdem ratione; vnde per ea quæ iam demonſtrauimus,

conus

Digitized by Google

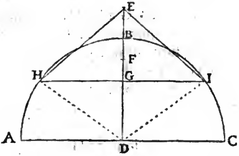
Conus *HEI* eſt æqualis portioni *HBI*.

Cum etiam exceſſus ED ſupra FD, ſit linea EF, & exceſſus BD ſupra FD, ſit linea BF, vel FG; erit tota EG, exceſſus duarum maiorum ED & BD, ſupra duplam FD, & ſi vtrique addita fuerit FD, erit exceſſus trium proportionalium videlicet ED, BD & FD, ſupra FD minorem ter. Eſt autem conus HEI, ad conum HBI, ſicut EG ad BG; BG autem eſt exceſſus mediæ ſupra minorem bis. Conns igitur HEI, vel portio HBI (ſunt enim æquales,) eſt ad conum HBI, ſicut EG ad BG, hoc eſt exceſſus trium proportionalium ſuper minorem ter, ad exceſſum mediæ ſupra minorem bis; quod primo erat demonſtrandum. & corollarium eiuſdem.

Proportio autem portionis ad Hemiſphærium compoſita eſt ex proportione eiuſdem ad ſectorem, & ſectoris ad Hemiſphærium. Ducantur itaque lineæ HD, & ID, & concipiatur Rhombus HEID, qui ob æqualitatem coni HEI & portionis HBI, æqualis eſt ſectori HBID. Proportio autem portionis ad Rhombum, vel ſectorem, eſt eadem quæ lineæ EG ad lineam ED; ſectoris vero ad Hemiſphærium eſt ratio BG ad BD. Sunt enim in ratione ſuperficierum ſuarum, & ſuperficies in ratione ſegmentorum axis hemiſphærij. Proportio itaque compoſita eſt ex ratione EG ad ED, & BG ad BD. Eſt igitur per 23. ſexti Elementorum portio ad Hemiſphærium, ſicut rectangulum ex EG in BG, hoc eſt exceſsû trium proportionalium ſupra minorem ter in exceſſum mediæ ſupra minorem bis, ad rectangulum ex ED in BD, hoc 6. huius. 8. huius.

eſt ex maxima trium proportionalium prædictarum in mediam earum; ſicut in propoſitione enunciatum fuit.

COROLLARIVM.



Ex hoc apparet quod fieri poſſit portio, quæ ad conum ſuum habeat rationem datam maioris inæqualitatis modo non excedat duplam, & quod ſemper maior ſit quàm ſeſquialtera. Quod autem proportio ſemper maior ſit quàm ſeſquialtera, ſic demonſtratur. Lineæ enim E D, B D, & F D ſunt proportionales, & exceſſus earum E B & B F, in eâdem ratione; B G vero eſt dupla B F; ſi igitur conus conſtituatur æqualis portioni ſuper eâdem baſi, excedet ſemper conum portionis parte maiori quam dimidiâ; & ideo portio ad conum ſuum maiorem habet rationem quam ſeſquialteram.

Portio ad conum ſuum in ratione data.

Iam ſi data ſit ratio, quam habet E G ad B G, in quâ oporteat inuenire portionem ad conum ſuum; diuida-

uidatur BG biſariam in F; & ſicut EB ad BF, ita ſint duo aliæ lineæ, quarum differentia ſit EB; hoc autem fieri poteſt. Et hoc modo inueniemus centrum Hemiſphærij D, & portionem HBI. Vide infra poſt prop. 33.

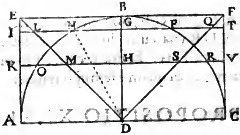
II. Ex demonſtratis etiam apparet quod ratio GB ad BE ſit eâdem quam habet duplum quadrati HG ad quadratum HB; & quod portio ſe habeat ad conum ſuum, ſicut dupla baſis vnà cum ſphæricâ ſuperficie portionis ad duplam baſim. Cum enim ſit EB ad BF in ratione duplæ BD ad BD & GD tanquam vnam; erit ſicut EB ad BF, ita quadratum HB ad quadratum HG; & ad poſteriorum dupla, ſicut EB ad BG, ita quadratum HB ad duplum quadrati HG, & permutando &c. Portio autem ſe habet ad conum ſuum ſicut EG ad GB; hoc eſt componendo, ſicut quadratum HB vnà cum duobus quadratis HG ad eadem quadrata HG. Et hoc verum eſt in omni portione, etiam maiori quam Hemiſphærium.

PROPOSITIO XXXI.

Exceſſus Cylindri conſtituti ſuper baſi & circa axem Hemiſphærij, ſupra conum rectangulum in eodm Cylindro, æqualis eſt Hemiſphærio; & ſingulæ partes, ſingulis partibus hemiſphærij inter eadem plana vbicunque interceptis æquales erunt.

Hæc

HAEC Propoſitio eſt conſectarium ad ſeptimam huius, in quâ agitur de æqualitate exceſsûs Cylindri ſupra Hemiſphærium ad conum rectangulum; & probatur quod exceſſus ille ſit æqualis cono rectangulo inſcripto Cylindro; & quod ſingulæ partes correſpondentes ſingulis partibus inter eadem plana parallela ſint etiam æquales; vnde etiam ſequebatur proportio ſeſquialtera Cylindri ad Hemiſphærium: In hac verò demonſtrabimus (quod etiam demonſtrari potuiſſet in dicta octaua huius) æqualitatem Hemiſphærij & partium eius ad exceſſum Cylindri ſupra conum rectangulum.



Sit igitur Hemiſphærium ABC, & Cylindrus EC ſupra baſim & circa eundem axem cum hemiſphærio, & in Cylindro ſit conus rectangulus EDF, inuersè poſitus ad Hemiſphærium; & ſecentur omnia duobus planis IT & KV, baſi hemiſphærij parallelis; ſcilicet conus in L, Q, & M, S; Hemiſphærium in N, P, & O, R; & axis eorum communis in G & H. Dico quod totus exceſſus Cylindri EC, ſupra conum re-

ctan-

ctangulum E D F, æqualis ſit Hemiſphærio A B C; & quod ſingulæ partes ſingulis partibus correſpondentes inter eadem plana parallela, ſint inter ſe æquales.

Ad demonſtrationem verò vtemur eodem artificio, quo vſi ſumus ad demonſtrationem ſeptimæ huius.

Cum enim quadratum radij Hemiſphærij B D in omni parallelo vtcũque ducto, ſit æquale duobus quadratis radiorum circulorum a ſectione factorum; videlicet in plano I T, quadratum ex D N vel B D (ſunt enim æqualia) æquale eſt duobus quadratis ex N G, & G D; G D vero æqualis eſt L G, igitur quadratum ex N D, æquale eſt duobus quadratis N G & L G; Circulus igitur factus a radio N D vel I G (ſunt enim æquales) æqualis eſt duobus circulis factis a radij L G, & N G. Sed circulus ex radio I G, eſt circulus in Cylindro factus ex interſectione plani I T; circulus verò ex radio L G, eſt circulus in cono rectangulo; denique circulus ex radio N G, eſt in Hemiſphærio factus ex eadem interſectione plani I T. Rurſus circulus ex I G radio, æqualis eſt duobus circulis ex radijs L G, & N G; eſt etiam æqualis circulo ex L G vnà cum exceſſu, ſcilicet eo quod factum eſt ex parte I L, vnde exceſſus ille æqualis eſt circulo ex radio N G; exceſſus igitur circuli facti in Cylindro E C ſupra circulum factum in cono rectangulo E D F, æqualis eſt circulo facto ex radio N G in hemiſphærio A B C; Idem demonſtrabitur in circulis factis per interſectionem plani K V; & in omnibus planis baſi A C parallelis, vtcunque interſecantibus Cylindrum, conum rectangulum, & Hemiſphærium. Vnde per lemma ante propoſitionem

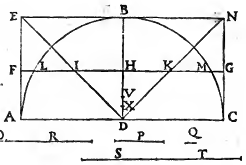
7. huius apparet, quod totus exceſſus Cylindri E C, ſupra conum rectangulum E D F, æqualis ſit Hemiſphærio A B C; & quod ſingulæ partes eiuſdem, ſingulis partibus dicti Hemiſphærij correſpondentes inter eadem plana, ſint etiam æquales; ſcilicet quod pars Cylindri notata literis I L M K, S Q T V, æqualis ſit parti Hemiſphærij O N P R; & ſic per totum; quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXII.

Si Hemiſphærium ſectum fuerit vtcunque plano ad baſim parallelo; & ſicut axis Hemiſphærij ad axem ſegmenti, ita fuerit axis portionis ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam; Portio ita ſe habebit ad Hemiſphærium, ſicut exceſſus, quo triplus axis eius excedit tres prædictas proportionales ad duplum axem Hemiſphærij.

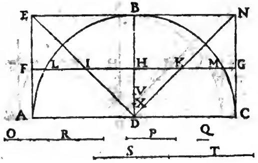
SEcetur enim Hemiſphærium ABC vtcũque plano F G, baſi A C parallelo, ſecante axem B D in H: Concipiatur iam Cylindrus A N ſuper baſi hemiſphærij A C & in eadem altitudine conſtitutus, & in eo inſcriptus conus rectangulus E D N inuerſe poſitus Hemiſphærio; qui etiam ſecti ſint plano F G, Cylindrus ſcilicet in F & G, conus rectangulus in I, & K, He-

miſ-



miſphærium vero in L, & M. Fiat iam linea OR æqualis axi Hemiſphærij BD, & P æqualis HD; & ſit ratio OR ad Q, tripla eius quam habet ipſa OR ad P. Quare ſicut conus EDN ad conum IDK, ita erit linea OR ad lineam Q; & ſubductâ lineâ Q ab OR lineâ, reliqua R, erit ad totam OR, ſicut truncus coni EIKN ad conum totum EDN.

Rurſus fiat linea ST æqualis triplæ BH, ex quâ ſubtractâ parte T æquali lineæ R, reliqua S erit ad totam ST, ſicut exceſſus Cylindri EG ſupra truncum coni EIKN, hoc eſt ſicut portio LBM, ad Cylindrum EG. Sed Cylindrus EG eſt ad conum EDN, ſicut tripla BH ad BD, hoc eſt ſicut tota ST ad totam OR. Ex æquali igitur erit ſicut linea S ad totam OR, ita portio LBM ad conum EDN. Hemiſphærium verò ABC eſt duplum coni EDN; quare portio LBM erit ad Hemiſphærium ABC, ſicut linea S ad duplam totius OR. Sed linea R, vel T, eſt aggregatum trium proportionalium, quarum BH ma-



xima in ratione BD ad DH: quod ſic probabimus; Sit enim ſicut BD ad DH, ita BH ad HV, & HV ad VX; & quoniam eſt ſicut BD ad DH, ita BH ad HV; erit permutando ſicut BD ad BH, ita DH ad HV; & per conuerſionem rationis ſicut BD ad HD, ita HD ad VD: Iterum cum ſit ſicut HD ad VD, ita HV ad VX; erit permutando & per conuerſionem rationis (vt prius) ſicut HD ad VD, ita VD ad XD. Quare ſunt quatuor lineæ continue proportionales BD, HD, VD & XD. Facta eſt autem Q linea in triplâ ratione (& ideo quarta proportionalis) ad lineam OR, eius quam habet ad P lineam, hoc eſt in triplâ ratione ad axem BD, eius quam habet ipſa BD ad HD axem ſegmenti (ſunt enim æquales BD, OR, & HD, & P,) Quare Q æqualis eſt lineæ XD, cum ſint ambæ in eadem ratione ad axem BD: deductis igitur ex æqualibus BD & OR, æqualibus Q & XD, quæ remanet pars R æqualis erit parti BX. Igitur pars T æqualis etiam erit BX, aggre-

gato

gato trium linearum proportionalium BH, HV, & VX. Linea vero ST eſt æqualis triplæ BH; quare parte T deductâ, linea S erit æqualis exceſſui quo triplus axis portionis LBM excedit tres illas proportionales, quarum maior eſt axis portionis: Ratio igitur portionis ad Hemiſphærium eſt ſicut lineæ S ad duplam BD; vel ſicut exceſſus triplæ BH ſupra tres proportionales, ſeu lineam BX, ad duplam axem Hemiſphærij; quod erat demonſtrandum.

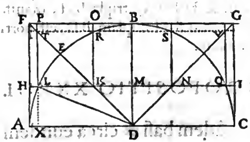
COROLLARIVM.

Hinc ſequitur quod datâ ratione ſegmẽtorum axis, data eſt etiam ratio portionis ad Hemiſphærium: Inuentâ enim (ex ratione datâ BD ad HD) lineâ BX; vel aggregato trium proportionalium, quarum BH maior, & deductâ BX ex triplâ BH, manifeſta erit linea S; quæ ratio S ad duplam BD, eſt portionis ad Hemiſphærium.

PROPOSITIO XXXIII.

Si ſuper eâdem baſi & circa eundem axem conſtituta fuerint Hemiſphærium & Cylindrus, & in Cylindro conus rectangulus inuersè poſitus Hemiſphærio; quæ omnia ſecta fuerint vtcunque infra communem interſectionem Hemiſphærij &

Coni plano ad baſim parallelo, faciente circulos in Hemiſphærio, cono, & Cylindro; & ſi ſuper circulo in cono pro baſi conſtituatur Cylindrus alter, & tertius ſuper circulo facto in Hemiſphęrio, circa partem axis inter polum Hemiſphærij & planum ſecans: pars Hemiſphærij dempto Cylindro facto ſuper ſectione coni, æqualis eſt parti Cylindri factæ ſuper ſectione Hemiſphærij, demptâ parte coni in eodem Cylindro interceptâ.



Sit Hemiſphærium ABC, centrum D, axis BD; & ſuper eadem baſi hemiſphærij AC conſtituatur Cylindrus eiuſdem altitudinis FC; & in eo inuersè poſitus ſuper baſi FG æquali baſi hemiſphærij AC, ſit conus rectangulus FDG, cuius & hemiſphærij ſit cõ-

munis

munis interſectio E; & infra ducatur vtcunque planum HI baſi AC parallelum ſecans hemiſphærium in L, & Q, conum rectangulum in K & N, & axem communem in M: conſtituatur etiam ſuper circulum factum in cono KN Cylindrus ON, & ſuper circulum in Hemiſphærio LQ Cylindrus PQ. Dico partem Hemiſphærij ABC, interceptam in Cylindro PQ, dempto Cylindro ON, ſcilicet quæ notatur literis LRK, NSQ, æqualem eſſe parti eiuſdem Cylindri inter eadem plana (dempto cono rectangulo) interceptæ, & ſignatæ literis LTK, NVQ. Tranſeat enim planum per TRSV, quod ſit TV, & ducatur linea LD:

Et quoniam quadratum LD æquale eſt quadratis LM, & MD, quadratum vero HM æquale eſt iiſdem quadratis; lineæ enim ſunt æquales; ſunt etiam æquales lineæ KM, & MD; Quadratum igitur HM æquale eſt quadratis LM & KM. Circulus vero ex radio HM, hoc eſt circulus in Cylindro FC, æqualis eſt circulo ex radio LM, hoc eſt circulo in Hemiſphærio LQ, vnà cum reliquo facto ex parte HL; quod igitur factum eſt ex parte HL æquale eſt circulo facto ex radio KM: æqualis igitur eſt Cylindrus ON exceſſui Cylindri FI ſupra Cylindrum PQ, hoc eſt ſolido incauato conſtituto ſuper exceſſu circuli HI ſupra circulum LQ; demptis igitur ex æqualibus, ſcilicet ex parte hemiſphærij LRSQ, parte Cylindri ON, notatâ literis KRSN, & ex exceſſu Cylindri FI ſupra truncum coni rectanguli FKNG, parte excauati ſolidi notatâ literis HT, & VI, quæ reliquæ ſunt partes Hemiſphærij & exceſſus Cylindri FC ſupra co- Per 31. huius æquales ſunt.

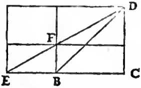
num

num rectangulum inter eadem parallela plana ſunt inter ſe æquales, quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Multa alia ex hac demonſtratione occurrunt circa æqualitatem partium; quemadmodum ſi ſectio fiat ſupra E, vtpote in plano T V, erunt partes F P T, & O R B, inter ſe æquales ſcilicet in Cylindro O N, & in reliquo, vel exceſſu Cylindri F I ſupra Cylindrum PQ: Similiter & pars L T E parti E R K, ablatâ communi L E K. Iterum ſi producti fuerint Cylindrus ac etiam exceſſus prædictus vſque ad baſim A C, manifeſta erit æqualitas inter partem K Z D & exceſſum L A X ex deductione æqualium A H L, K M D: quod neceſſarium animaduertiſſe duxi.

Quod aſſumptum fuit in fine Coroll. Prop. 30. ſic demonſtrabitur. Data enim ſit E B differentia laterum rectanguli quæſiti, & ratio laterum ſit E B ad BF, ex quibus fiat rectangulum E F; Ducatur iam diameter E F, & producatur quantum opus; Producto etiam latere E B, diuidatur angulus F B C, biſariam lineâ BD, quæ quoniam anguli F E B, E B D ſunt minores duobus rectis coincidet cum productâ E F; Concurrant igitur in puncto D, a quo demittatur perpendicularis D C ad productam E B, & compleatur rectangulum E D. Dico latera E C, & C D, eſſe latera rectanguli quæſiti.

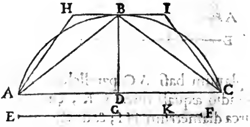


Eſt

Eſt enim ſicut EB ad BF, ita EC ad CD, & eſt BC, æqualis CD; Igitur EB eſt exceſſus lateris EC ſupra latus CD, & Rectangulum ED eſt quod quærebatur.

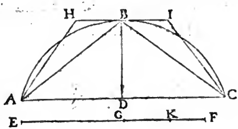
PROPOSITIO XXXIV.

Cuicunque portioni ſphæræ datę, quę non ſit maior Hemiſphærio, æquale Truncum coni conſtituere ſuper eâdem baſi, & eiuſdem altitudinis.



ESto portio ABC, ſuper baſi AC, in quo inſcribatur conus ABC, ſuper eadem baſi. Et quoniam conus ſe habet ad portionem ABC, ſicut duplum quadratum AD, ad idem duplum quadratum vnà cum quadrato AB: proportio vero eiuſdem coni ABC, ad truncum quæſitum, eſt ſicut lineæ AD, ad tres continue proportionales, quarum AD radius baſis maioris, prima, & HB radius baſis minoris, Corol. 2. tricefimi huius. 16. huius.

ſecunda; Eadem vero erit ratio radij A D ad compoſitam ex eâdem A D, vnà cum reliquis duabus proportionalibus, quæ dupli quadrati A D, ad compoſitum ex eodem duplo quadrato vnà cum quadrato A B. Fiat itaque ſicut duplum quadrati A D ad idem duplum vnà cum quadrato A B, ita linea A D ad lineam E F; quæ diuidatur in puncto G, vt ſit pars E G æqualis A D; reliqua vero G F in K, vt ſint E G, G K, K F, tres lineæ continue proportionales; & per punctum B,



tranſeat planum baſi A C parallelum, in quo fiat circulus ex radio æquali lineæ G K, cuius centrum B, qui ſit circa diametrum H I; & ductis lineis A H, I C, concipiatur truncus coni A H I C; Dico hunc æqualem eſſe portioni A B C.

Quoniam enim truncus coni A H I C ſe habet ad conum A B C, ſuper eâdem baſi A C & eiuſdem altitudinis B D, ſicut tres lineæ continue proportionales in ratione radij A D ad radium H B; hoc eſt ſicut linea E F ad lineam E G, vel A D, (ſic enim per conſtructionem factum eſt,) erit permutando ſicut A D ad E F, ita conus A B C, ad truncum coni A H I C; (16. huius.)

Sed

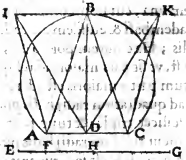
Sed factum eſt etiam ſicut conus A B C ad portionem A B C, ita A D linea ad E F lineam; Ex æquali igitur ſicut Conus A B C ad truncum coni A H I C, ita idem Conus ad portionem A B C. Aequales igitur ſunt trunci coni & portio ſuper eâdem baſi & in eâdem altitudine conſtituti; quod faciendum erat. Cor. 30. huius.

SCHOLIVM.

Hic obſeruandum duxi, quod nulla ſit portio ſphæræ præterquam vna, cui non conſtitui poſſit truncus Coni ſuper eadem baſi & eiuſdem altitudinis cum portione, æqualis; Hæc autem portio eſt, quando axis ſphæræ ſecta eſt, vt ſit pars maior ad reliquam tripla; vnde quadratum partis maioris eſt ad rectangulum ex partibus, vel ad quadratum radij baſis portionis, in eâdem ratione ſcilicet triplâ; & tunc portio (cum ſit ad conum ſuum, ſicut triplum radij baſis quadratum vnâ cum quadrato axis, hoc eſt ſex quadrata, ad eiuſdem duo quadrata, in ratione tripla) erit tripla coni & ideo æqualis Cylindro ſuper eâdem baſi & eiuſdem altitudinis conſtituto: Truncus igitur coni non poteſt conſtitui ei æqualis ſuper eâdem baſi & in eâdem altitudine. Si vero ſecta fuerit diameter ſphæræ in maiori quàm triplâ ratione partium, etiam fieri poteſt truncus coni maiori portioni æqualis, ſed baſis portionis erit minor baſis trunci, quod ſic demonſtratur. Cylindrus æqualis portioni ſphęræ ſuper eadẽ baſi & eiuſdẽ altitudinis.

PROPOSITIO XXXV.

Datæ portioni ſphæræ, quæ habet rationem quadrati axis ad quadratum radij baſis maiorem quam triplam, Inuenire æquale fruſtum coni eiuſdem altitudinis, & ſuper eadem baſi.



SIt portio ſphæræ A B C, axis B D, radius baſis A D; & ſit ratio quadrati B D ad quadratum A D, maior quàm tripla; & inſcribatur conus A B C, circa eundem axem B D, & ſuper eâdem baſi A C; & cum nota ſit proportio coni A B C, ad portionem A B C, fiat ſic linea E F, ad E G lineam, & erit E G maior quam tripla E F; quoniam portio maior eſt, quàm tripla coni inſcripti: Diuidatur iam F G in H, vt ſint E F, F H, H G, continue proportionales; & ducto plano per polum B parallelo baſi A C, in eo fiat circulus ex radio B I, in ratione ad A D, ſicut F H, ad E F; &

Per Coroll. 2 triceſimi huius.

Scholium precedens.

15. huius.

ductis

ductis lineis AI, CK, concipiatur AIKC truncus coni: Quem dico æqualem eſſe portioni ſphæræ ABC. 16. huius.

Cum enim factum ſit ſicut conus ABC, ad portionem ABC, ita EF, ad EG; factum eſt etiam ſicut FH ad EF, ita IB radius baſis maioris ad AD radium minoris baſis trunci coni AIKC; & quoniam Coni IDK, & ABC habent baſes ſuas ex iiſdem radijs ſcilicet IB, & AD & eiuſdem altitudinis; erit Conus IDK ad conum ABC, ſicut HG, ad EF, hoc eſt in duplicatâ ratione FH, ad EF. Sed cum ſit eadem proportio trunci AIKC ad conum IDK, quæ lineæ EG ad lineam HG; & coni IDK ad conum ABC, quæ lineæ HG ad lineam EF, ex æquali eadem erit proportio Trunci AIKC ad Conum ABC, quæ lineæ EG ad lineam EF; & permutando ſicut EF ad EG, ita Conus ABC ad Truncum coni AIKC. Sed per conſtructionem facta eſt EF ad EG ſicut Conus ABC ad portionem ſuam ABC. Aequales igitur ſunt Portio ABC, & Truncus coni AIKC, qui conſtitutus eſt ſuper eâdem baſi & eiuſdem altitudinis. Quod faciendum proponebatur.

COROLLARIVM.

Ex hoc elicitur, quod tres Coni in eâdem ratione, quâ ſunt radij baſium trunci, & eiuſdem altitudinis, ſint æquales Trũco Coni: nam cum ſint ſicut tres proportionales in ratione radiorum baſium trunci, ad maximam earum, ita truncus coni AIKC ad Conum IDK; Sed & tres Coni in eâdem ratione ſunt ad maxi-

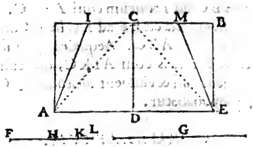
mam

Digitized by Google

mam earum in eâdem ratione. Conſequitur ergo quòd tres coni, ſcilicet Conus IDK, ABC, & alter qui ſit medius proportionalis inter eos, ſint æquales Trunco Coni AIKC.

PROPOSITIO XXXVI.

Truncum coni inſcribere Cylindro ſuper eiuſdem baſi & in eâdem altitudine, qui habeat ad Cylindrum rationem datam. Ratio autem debet eſſe maior, quam ſubtripla.



SIt Cylindrus AB, cuius axis CD, & ratio data ſit ea quam habet linea FL ad lineam G, in qua conſtituendus ſit truncus coni ad Cylindrum AB.

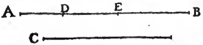
Quoniam verò FL maior eſt quam tertia pars lineæ G, abſcindetur ab eâ pars FH æqualis tertiæ parti eiuſdem, & diuidatur reliqua in puncto K, vt ſint

F H, H K, K L, continue proportionales; & fiat ſicut F H, ad H K, ita A D radius baſis Cylindri ad C I, pro radio baſis minoris trunci; ex quo facto circulo circa diametrum I M, & ductis lineis A I, M E, concipiatur Truncus coni A I M E. Quem dico habere ad Cylindrum datum A B, rationem datam lineæ F L ad lineam G. 15. huius.

Quoniam enim factum eſt ſicut F H ad H K, ita A D ad I C; erit ſicut F L ad F H, ita Truncus Coni A I M E, ad conum A C E. Igitur ſicut F L ad triplam F H, vel lineam G; ita truncus A I M E ad Cylindrum A B, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Simili prorſus modo, Cylindro circumſcribi poteſt Truncus coni in ratione datâ. Cùm enim conus ſuper baſi minori trunci & eiuſdē altitudinis ſit, ſicut minor trium proportionalium ad tres proportionales ſimul, in ratione radij minoris baſis, ad radium maioris; Cylindrus verò ſit triplus eiuſdem coni; habebit rationem quam habet triplus radius minoris, ad tres dictas proportionales. Sit igitur ratio data lineæ A B ad lineam C, in quâ circumſcribendus ſit a Trunco coni Cylindrus datus; & in A B ſumatur pars A D æqualis tertiæ parti ipſius C, reliqua vero D B diuidatur in E, vt ſint A D, D E,

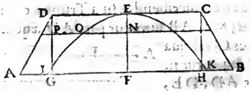


E B continue proportionales. Et quoniam A D eſt tertia pars lineæ C, erit truncus coni quæſitus ad co-

num ſuper minori baſi, ſicut tota A B ad A D. Fiat igitur ſicut A D ad D E, ita radius baſis Cylindri ad radium baſis maioris Trunci, & compleatur ex his baſibus circa eandem diametrum Cylindri Truncus coni; Quem dico habere eandem rationem ad Cylindrum datum, quam habet linea A B ad lineam C. Demonſtratio ex præcedentibus, & conſtructione conſtat.

PROPOSITIO XXXVII.

Si in Trunco Coni conſtitutus fuerit Cylindrus ſuper baſi minori eius, & circa eundem axem; erit exceſſus trunci ſupra Cylindrum æqualis cuidam conoidi Hyperbolico, cuius vertex eſt centrum baſis minoris trunci, altitudo vero eadem, & cuius genetricis Hyperbolæ aſymptoti ſunt in lateribus eiuſdem Trunci.



SVper baſi A B, conſtituatur truncus coni ADCB, cuius minor baſis ſit DC, eique æqualis facta ſit

GH; & circa axem EF trunci & baſim eandem GH concipiatur Cylindrus GDCH: Dico exceſſum trunci ADCB ſupra Cylindrum GDCH æqualem eſſe Conoidi cuidam Hyperbolico, cuius vertex punctum E, & Hyperbolæ (a cuius reuolutione factum eſt) aſymptoti ſint in lateribus ipſius trunci. Secentur enim omnia plano per axem; & baſi AB, parallela ducatur linea vtcunque LM, ſecans axem in N, & lineam DG in P puncto.

Quoniam igitur linea LM ſecta eſt bifariam in N, & non bifariam in P; erit rectangulum LPM vnà cum quadrato PN æquale quadrato LN: quod cùm ſit maius rectangulo LPM, ſit pars eius ſcilicet quadratum ON, ei æquale; quadratum igitur ON vnà cum quadrato PN, vel DE ſimul, æquali a ſunt quadrato LN: Sed quadrato etiam ON vnà cum rectangulo LOM, æquale eſt idem quadratum LN; rectangulum igitur LOM, æquale eſt quadrato PN, vel DE.

Si igitur in plano per axem circa diametrum EF, per puncta E, O, ducta fuerit Hyperbola; erit quadratum DE æquale quartæ parti figuræ, & per totum quadrilaterum ABCD, vbicunque ducta fuerit linea LM æquidiſtans baſi AB, erit rectangulum ex parte intercepta inter latus AD & Hyperbolam EOI in reliquam, æquale quadrato DE, vel quartæ parti figuræ. Vnde conſtat quod ſi ex radijs ON, & PN, vbicunque ſumptis facti fuerint circuli, erunt ambo ſimul æquales circulo ex radio LN. Sed & circulus ex radio LN æqualis eſt circulo ex radio PN vnà cum exceſ-

Apollonij lib 2. propoſ. 10.

ſu qui fit ex parte L P. Exceſſus igitur, qui fit ex parte L P, æqualis eſt circulo facto ex radio O N; Vnde, per ea quæ demonſtrata ſunt, erit exceſſus trunci conici A D C B. ſupra Cylindrum G C, hoc eſt corpus illud ſolidum factum ex reuolutione trianguli A D G, circa axem E F, æquale Conoidi Hyperbolico I E K. Quod autem latera A D; C B, ſint ipſius hyperbolæ aſymptoti, manifeſtum eſt ex demonſtratis ab Appollonio libro ſecundo conicorum.

Lẽm ante prop. 7. huius.

PROPOSITIO XXXVIII.

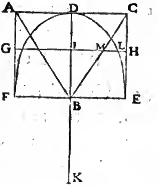
Si in Cylindro inſcribatur circa axem eius Conus qui non ſit rectangulus; erit exceſſus Cylindri ſupra conum, æqualis Hemiſphæroidi circa eundem axem conſtituto; & ſingulæ partes exceſſus inter eadem plana interceptæ, æquales erunt ſingulis eiuſdem Hemiſphæroidis partibus inter eadem plana interceptis.

SIt Cylindrus A E, cuius axis B D; & ſuper baſim eius A C, & circa eũdem axem inſcribatur Conus A B C qui non ſit rectangulus: ſi enim fuerit rectangulus, tunc exceſſus Cylindri ſupra conum æqualis eſt hemiſphærio, vti iam demonſtratum eſt. Dico iam exceſſum Cylindri A E ſupra conum A B C, æqualem eſſe Hemiſphæroidi cuidam conſtituto ſuper baſi F E

31. huius

& cuius

& cuius idem ſit axis BD.



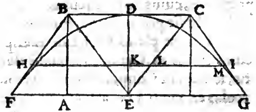
Secentur enim Cylindrus & Conus plano GH ad baſim AC parallelo, vtcunque per axem in puncto I; & producto axe in K, vt ſit BK æqualis BD, fiat ſicut rectangulum KBD, vel quadratum BD, ad quadratum BE vel DC, ita rectangulum KID, ad quadratum IL; & erit punctum L in Elypſi. Sed ſicut quadratum BD ad quadratum DC, ita quadratum BI, ad quadratum IM. Erit igitur componendo, ſicut rectangulum KID vnà cum quadrato IB, ad quadratum IL vnà cum quadrato IM, ita quadratum BD ad quadratum DC. Sed rectangulum KID vnà cum quadrato BI æquale eſt quadrato BD: Quadrata igitur IL, & IM ſimul æqualia ſunt quadrato DC. Circulus igitur ex radio DC, vel IH; æqualis eſt duobus circulis ex radijs IM, & IL; hoc eſt circulis factis in cono ABC, & in Hemiſphæroide, cuius baſis circulus FE, & vertex punctum D: Et ſic per totum Cylindrum AE, vbicunque ſectus fuerit plano GH baſi AC parallelo, erit circulus factus in Cylindro æqualis duobus circulis factis, ſcilicet in Cono, & Hemiſphæroide. Sed idem circulus ex radio IH, æqualis eſt circulo ex radio IM in cono, & exceſſu facto ex parte MH. Vnde manifeſtum eſt, quòd exceſſus per totum Cylindrum æqualis ſit Hemiſphæroidi; & quod ſingulæ par-

21. primi Apollonij.

tes ſingulis correſpondentes ſint æquales. quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIX.

Si in Cylindro inſcribatur Conus ſuper baſi eius; & circa eundem Cylindrum circumſcribatur Trũcus coni, cuius minor baſis ſit eadem cum Cylindro & cono, & ſi figuræ planæ ex ſectione trunci coni & coni per axem factæ, habeant latera oppoſita parallela; erunt ambo exceſſus ſcilicet Cylindri ſupra conum, & Trunci coni ſupra Cylindrum ſimul ſumpti, ęquales Conoidi cuidam parabolico circa eundem axem & ſuper eâdem baſi cum trunco coni conſtituto.



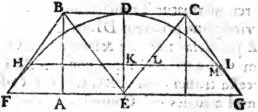
Sit enim Cylindrus A C, in quo ſit inſcriptus Conus B E C; & circa eundem A C Cylindrum, &

ſuper baſi eiuſdem BC, (quæ etiam eſt baſis inſcripti coni) circumſcribatur Truncus coni FBCG, ita vt ſi ſecti fuerint plano per axem DE, ſint latera oppoſita FB, CE parallela; ſimiliter & latera BE, CG. Dico exceſſum Cylindri AC ſupra conum BEC, vna cum exceſſu trunci coni ABCG ſupra Cylindrum AC, ſimul æquales eſſe Conoidi cuidam Parabolico circa eundem axem DE & ſuper eâdem baſi FG conſtituto. Ducatur enim vtcunque planum baſi FG parallelum faciens in ſectione per axem lineam HI, ſecans vero axem DE in K, & latus coni EC in L.

Et quoniam lineæ FB, EC ſunt parallelæ; æquidiſtantes etiam ſunt FE, HL, quare æqualis eſt HL ipſi FE, ideoque rectangulum HLI ad rectangulum FEG ſe habet ſicut LI linea ad lineam EG. Sed ſicut LI ad EG, ita eſt CL ad CE, & DK ad DE. Rectangulum igitur FEG, vel quadratum EG, eſt ad rectangulum HLI, vel ad quadratum ei æquale, ſicut linea DE, ad lineam DK. Quare ſi in linea KI ſumatur quoddam punctum M, ita vt quadratum KM ſit æquale rectangulo HLI; erit punctum M in Parabolâ, circa axem DE, cuius vertex punctum D, & ordinatim applicatæ ſunt lineæ KM, & EG. Et ſic per totum triangulum ECG, vbicunque ducta fuerit linea parallela ad FG, erit rectangulum ex parte interceptâ & partæ extrâ, inter parallelas FB, & EC, in eâdem ratione ad rectangulum FEG, vel quadratum EG, ſicut pars axis quæ ad verticem D, ad totum axem DE. Deducitur ex 11. primi Apollonij. 20. eiuſdem.

Sed exceſſus quadrati KI ſupra quadratum KL,

eſt re-



eſt rectangulum H L I, (& ſic in reliquis;) vnde ſi concipiantur circuli facti ex radijs K L & K I, (& ſic in reliquis Coni B E C, & trunci F B C G partibus) erunt exceſſus circulorum in trunco ſupra circulos in Cono, inter ſe ſemper in ratione ſegmentorum diametri D E (ſcilicet partium interceptarum inter verticem D & ſectionem) ad totam D E. Sed ita ſe habent in Parabola ordinatarum applicatarum quadrata; Vnde manifeſtum eſt quod corpus ſolidum ex reuolutione earum factum, æquale erit exceſſui trunci Coni F B C G ſupra Conum B E C; quod erat propoſitum demonſtrare.

COROLLARIVM.

In præcedentibus demonſtratum eſt, quòd exceſſus Trunci Coni ſupra Cylindrum æqualis ſit Conoidi Hyperbolico; & quòd exceſſus Cylindri ſupra Conum non rectangulum æqualis ſit Hemiſphæroidi. & iam demonſtrauimus, quod duo illi exceſſus ſimul ſint æquales Conoidi Parabolico. Vnde etiam manifeſtum eſt, quòd Conoides Parabolicum æquale ſit Conoidi

Hyperbolico, & hemiſphæroidi ſimul ſumptis; (ſuppoſito quòd truncus Coni habeat conditionem in propoſitione declaratam.) Ex quo etiam ſequitur, quòd cùm Hemiſphæroides ſit duplum Coni inſcripti ſicut ab Archimede demonſtratur, Conoides hyperbolicum erit Hemiſphæroidis duplum, (omnia enim ſimul ſumpta æqualia ſunt Trunco Coni, qui ſeptuplus eſt coni B E C:) ac etiam quòd exceſſus Trunci Coni ſupra Conoide Parabolicum æquale ſit Cono B E C; & quòd ſic ſe habebit ſemper quando diameter tranſuerſa Hyperbolæ, ex cuius reuolutione factum eſt Conoides Hyperbolicum æqualis fuerit axi Ellipſis genetricis eiuſdem Hemiſphæroidis, & figuræ ipſarum ſimiles: Vnde per Geometriam Indiuiſibilium, a Patre Bonauentura Cauallerio nuper repertam, facile demonſtrabitur, quod ratio ipſorum Solidorum ſit dupla; hoc autem ſtudioſis relinquo, cum non ſit intentum meum in hanc meſſem immittere falcem: Multa autem ſunt, quæ, ope huius Geometriæ, facilius in lucem prodeunt, quam veteri Archimedis methodo, & ideo a Geometris non negligendam cenſeo.

Prop. 29. de Conoi. & Sphæroidibus.

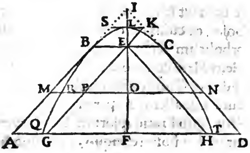
Exceſſus Trunci ſupra Conoi de Parabolicā æquale Cono.

PROPOSITIO XXXX.

Si in trunco Coni inſcriptus fuerit Conus circa eundem axem, ita vt ſi ſecti fuerint plano per axem, habeant quæ facta ſunt in plano latera inuicem parallela ad eaſ-

dem

dem partes; Exceſſus Trunci ſupra Conum, æqualis erit fruſto Conoidis Parabolici, circa eundem axem, & inter baſes eiuſdem trunci Coni conſtituto, & latera Trapeziæ per ſectionem factæ erunt tangentes ipſius Parabolæ.



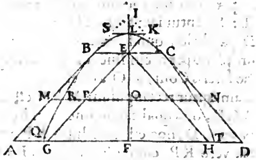
SIt Truncus Coni A B C D, cuius axis E F, & circa eundem Conus G E H, ita conſtitutus vt cum ſecti fuerint per axem, lineæ A B, G E, ſint parallelæ, Dico exceſſum Trunci A B C D, ſupra Conum GEH, æqualem eſſe fruſto Conoidis cuiuſdam Parabolici, circa eundem axem & inter baſes eiuſdem trunci conſtituto; cuius Parabolæ, lineæ A B & C D ſunt tangentes. Secetur enim tam Truncus quam conus plano per axem F E, & producantur latera A B, D C donec concurrant in I, in quo etiam puncto axis F E productus illis occurrat: Producatur etiam latus G E in K, ad concurſum lineæ D C productæ; & a puncto K aga-

tur

tur KS, parallela BC, ſecans axem productum in puncto L: Secentur iam ambo plano MN vtcunque baſi AD parallelo, quod faciat communem ſectionem cum plano per axem lineam MN; in quâ ſit P interſectio lateris Coni, & O axis eius.

Quoniam igitur rectangulum MPN eſt ad rectangulum AGD, ob æqualitatem linearum MP & AG, ſicut PN ad GD, hoc eſt ſicut linea KP ad lineam KG; linea vero KP, compoſita eſt ex KE & EP, & linea KG, ex KE & EG; eſt autem ſicut KE ad EP, ita LE ad EO; & componendo KP ad EP, ſicut LO ad EO; & permutando KP ad LO, ſicut EP ad EO: iterum ſicut KE ad EG, ita LE ad EF; & componendo ſicut KG ad EG, ita LF ad EF; & permutando KG ad LF, ſicut EG ad EF; ſed eadem eſt ratio EG ad EF, & EP ad EO. Quare eadem etiam erit ratio KG ad LF, quæ KP ad LO; & permutando ſicut KG ad KP, ita LF ad LO. Rectangulum ergo MPN eſt ad rectangulum AGD, ſicut linea LO ad lineam LF.

Si igitur in linea AF ſumatur pars FQ, cuius quadratum æquale ſit rectangulo AGD, & in linea MO pars RO, cuius quadratum ſit æquale rectangulo MPN; erunt puncta Q, & R, in Parabolâ, cuius vertex punctum L, diameter LF, & ordinatim applicatæ RO, & QF. Quare circuli, qui fient ex reuolutione parabolæ circa axem LF, æquales erunt exceſſibus circulorum in trunco coni ABCD ſupra circulos in Cono GEH. Quadratum enim MO æquale eſt quadratis RO & PO: Igitur & circulus ex radio 20. Primi Appollonij.



MO, æqualis erit duobus circulis ex radijs R O & PO factis, quod igitur factum eſt ex PO æquale eſt ei quod fit ex parte MR; & ſic in cæteris omnibus ſectionibus, & partibus, vbicunque ſecari continget. Quare exceſſus Trunci Coni ABCD ſupra Conum GEH, æqualis eſt Fruſto Conoidis Parabolici, cuius vertex eſt punctum L, extra Truncum Coni ABCD. Quod primo demonſtrandum erat.

Lemma ante 7. huius.

Quòd autem lineæ AB, CD, ſint tangentes eiuſdem Parabolæ ſic probatur. Cùm enim linea SK ſit parallela BE, & inter eaſdem parallelas lineas AB, & GK; erit etiam æqualis BE. Sed BC dupla eſt BE; Igitur & dupla SK; quare etiam BI dupla eſt SI; & EI dupla IL: Cùm igitur BE ordinatim applicata ſit diametro LE, & SL parallela tangens Parabolam in vertice L, & IL æqualis diametro LE; linea ducta a puncto I ad B, per conuerſum 35. libri 1. Appollonij erit tangens Parabolæ. Linea verò ABI eſt linea recta, quare AB linea, tanget etiam Parabolam in eodem puncto B: & ſic etiam linea DC; quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur quod exceſſus Trunci Coni A B C D ſupra fruſtum Conoidis Parabolici QRBCT ſit æqualis Cono G E H. Exceſſus Trunci ſupra fruſtũ Cono. Parab. æqualis Cono

Et ſi concipiatur triangulum B I C vnà cum Parabolâ B L C inſcriptâ, reuolui circa axem I E, vnde facti ſint Conus & Conoides Parabolicum; quod Conus ille (cuius axis duplus eſt axis Conoidis Parabolici) ſit eiuſdem Conoidis Parabolici ſeſquitertius. Conus cuius axis duplus eſt axis Conoidis Parabolici in eodem cono inſcripti, eſt ſeſquitertius ipſius Conoidis Parabolici.

Cùm enim Conus S I K ſit æqualis Cono ex eâdem baſi & circa axem L E; erit etiam æqualis exceſſui Trũci ſupra Conoide Parabolicum B I C; ſed totus Conus B I C octuplus eſt Coni S I K. Conoides igitur Parabolicum eſt ſex earum partium quarum Conus B I C eſt octo; & ideo ſeſquitertius eſt Conus B I C Conoidis Parabolici B L C.

PROPOSITIO XXXXI.

Exceſſus cuiuſcunque Portionis Sphæræ ſupra Conum ſuum æqualis eſt ſphæroidi cuidam lato circa axem eiuſdem Portionis conſtituto.

SIt enim Portio Sphæræ A B C, cuius baſis A C, axis vero B D; & ſuper eâdem baſi & circa eun-



dem axem conſtituatur Conus A B C; quæ omnia ſecentur vtcunque duobus planis baſi A C parallelis, quæ ſint E F, & G H, ſecantia etiam axem B D in I & K. Secentur iterum omnia plano per axem; & in latere A B ſint puncta L & M interſectiones linearum E F & G H cum eodem latere A B. Dico rectangulum E L F ad rectangulum G M H, eſſe ſicut rectangulum D I B ad rectangulum D K B.

Quoniam enim eſt ſicut D I ad I B ita A L ad L B; & ſicut D K ad K B, ita A M ad M B; erit rectangulum D I B ad rectangulum D K B, ſicut rectangulum A L B ad rectangulum A M B; componuntur enim ex eiſdem rationibus, ſcilicet ex D I ad D K, & I B ad K B, & ex ratione A L ad A M, & L B ad M B; D I verò ad D K eſt eadem quæ A L ad A M, & I B ad K B eſt eadem quæ L B ad M B. Sed rectangulo A L B æquale eſt rectangulum E L F, & rectangulo A M B æquale rectangulum G M H; eadem igitur eſt ratio rectanguli D I B, ad rectangulum D K B, quæ rectanguli E L F ad rectangulum G M H, & ſic erit per to-

tam

tam Portionem ABC vbicunque ſecta fuerit portio ABC lineis ad baſim AC parallelis; quia omnia rectangula ex ſegmentis parallelarum facta per interſectionem lineæ AB, inter ſe erunt in eâdem ratione, quâ ſunt rectangula ex ſegmentis axium viciſſim ſumptis, ſicut a parallelis eiſdem interſectus erit axis BD. Sed rectangulum GMH vnà cum quadrato MK, æquale eſt quadrato GK; & rectangulum ELF vnà cum quadrato LI æquale eſt quadrato EI; & ſic ſemper per totam portionem ABC, vbicunque ſecta fuerit portio lineis ad baſim AC parallelis; quadratum verò GK eſt ad quadratum MK, ſicut circulus ex radio GK ad circulum ex radio MK; & quadratum EI ad quadratum LI ſicut circulus ex radio EI ad circulum ex radio LI; quare rectangula GMH & ELF, (quæ cùm ſint exceſſus quadratorum GK & EI ſupra quadrata MK & LI) ſunt proportionalia exceſſibus circulorum ex radijs GK & EI, ſupra circulos ex radijs MK & LI factos.

Fiat igitur quadratum IN æquale rectangulo ELF & quadratum KO æquale rectangulo GMO. Dico iam puncta N, & O, eſſe in Ellipſi, cuius axis vel diameter minor eſt linea BD; ſunt enim quadrata KO, & IN in eâdem ratione, quâ ſunt rectangula DKB, & DIB; & ideo, cùm ſint ordinatim applicatæ diametro BD, erunt in ſectione puncta N & O; & propterea ſi ducta fuerit ſemiellipſis circa diametrum BD, tranſiens per puncta N & O, (ſicut a Mydorgio libro ſecundo Conicorum docemur,) & omnia circa axem BD reuoluantur; facta erit Portio Sphæræ ABC vnà 21. primi Apollonij.

cum

cum Cono A B C, & Sphæroide lato B N O D; Quamobrem, cum omnes circuli in illo facti per ſectionem cuiuſuis Plani baſi A C paralleli, ſint ſemper æquales exceſsibus Circulorum factorum in portione ſupra circulos in Cono factos per eiuſdem plani interſectionem, neceſſario ſequitur idem ſphæroides æquale eſſe exceſſui Portionis Sphæræ A B C ſupra Conum A B C; quod primo erat demonſtrandum.

Quòd autem diameter B D ſit ſemper in omni portione minor, ſic manifeſtabitur; & apparebit quod diameter altera erit ſemper æqualis lineæ A B: Supponatur enim quòd linea A B ſecta ſit bifariam a lineâ G H, in puncto M; vnde rectangulum A M B foret maximum omnium, quæ ex ſegmentis eiuſdem A B poſſit fieri; quare etiam rectangulum G M H erit maximum omnium, quæ ex ſegmentis linearum parallelarum baſi A C fient. Sed rectangulum G M H, cùm ſit æquale rectangulo A M B, eſt æquale quadrato dimidiæ A B. Quare diameter quæ per dimidiam diametri B D, vel lineæ A B tranſibit, erit æqualis toti A B; quæ maior ſemper erit in omni portione Sphæræ quam diameter BD; ſubtendit enim angulum rectum A D B. Minor igitur eſt diameter B D reliquâ, quæ per dimidiam B D tranſibit: & ideo Sphæroides erit latum, quod ex reuolutione Ellypſis circa minorem diametrum B D factum eſt. Quod etiam demonſtrandum erat.

Præmiſsis tractationibus de inſcriptione & circumſcriptione Cylindrorum in Truncis Conorum, nec non de comparatione exceſſuum eorum (vbi etiam æqualitatem quorundam ſolidorum quæ ex reuolutione Conicarum Sectionum generantur demonſtrauimus) iam ordine & naturâ conſequens occurrit, vt de Inſcriptione & Circumſcriptione ſolidorum eorundem inſtituatur diſquiſitio; ſcilicet de maximis inſcriptibilibus & minimis circumſcribentibus; quæ quoniã a nullo (quod ſciam) hactenus tractata eſt, cum tamen ab excellentiſſimo & eruditiſſimo viro D. Michaele Angelo Riccio aliqua huic ſpeculationi inſeruientia acceperim, quibus incitatus, ad ampliorem huiuſce materiæ ſpeculationem in gratiam ſtudioſorum excolendam incubui, & ſequentes propoſitiones præſenti negotio accommodas nec iniucundas (vt arbitror) conſtruxi. Et quoniam ſolidorum inſpectionis ratio eſt eadem in conis & Cylindris, quæ in Pyramidibus & Parallelepipedis; ſcilicet quòd ſicut Parallelepipeda ſunt tripla Pyramidum, quæ ſuper eâdem baſi & in eâdem altitudine ſunt, ita & Cylindri ſunt tripli Conorum; & omnia ſolida in triplicatâ ratione laterum, vel linearum homologarum, exordium ſumam a ſectione lineæ rectæ, & oſtendam quòd maximum ſolidum quod fit ex ſegmentis cuiuſuis rectæ lineæ, eſt quando linea ſecta ſit vt maius ſegmẽtum ſit duplum minoris; tunc enim ſolidum, quod fit a quadrato maioris ſegmenti pro baſi, & minore ſegmento pro altitudine, eſt maximum ſolidum quod fieri poterit ex ſegmentis eiuſdem rectæ lineæ. Præmittatur igitur.

LEMMA.



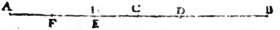
Sit recta A B ſecta bifariam in puncto C, & iterum in punctis H, & D, trifariam, & ſumatur vtcunque punctum E, quod iam ponamus in partem H D cadere, (tres enim ſunt caſus; ſcilicet vel quando aſſumptum punctum cadit intra terminos lineæ H D, vel extra eos, vel in alterutrum horum punctorum H vel D) & fiat ſicut A D ad A E, ita A E ad A F; & erit ſicut A D ad A E, ita D E ad E F. Dico rectangulum F E B maius eſſe duobus rectangulis C E D, C D E.

Quoniam enim C E minor eſt quam C D; C D vero dimidia D B; erunt C D, C E ſimul ſumptæ minores D B, & ideo rectangula C D E, C E D minora rectangulo E D B. Sed cum ſit F E ad E D, ſicut A E ad A D; erit rectangulum ex A D in F E, æquale rectangulo ex A E in E D. Rectangulum vero F E B, eſt ad rectangulum ex F E in A D propter communem altitudinem F E, ſicut E B ad A D, & rectangulum A E D (æquale rectangulo F E, A D) eſt ad rectangulum E D B, ob communem altitudinem E D, ſicut A E ad D B. Quare proportio rectanguli F E B, ad rectangulum E D B, compoſita eſt ex proportione E B ad A D, & A E ad D B; hoc eſt ſicut rectangulum A E B ad rectangulum A D B. Sed rectangulum A E B vnà cum quadrato E C, æquale eſt rectangulo A D B

vnà

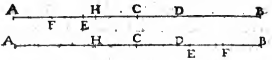
vnà cum quadrato D C; quanto ergo rectangulum AEB excedit rectangulum A D B tanto quadratum D C excedit quadratum E C. Exceſſus vero quadrati DC vel H C, ſupra quadratum E C, ſunt duo rectangula C E H & C H E; Eadem igitur æqualia ſunt exceſſui rectanguli A E B ſupra rectangulum A D B. Sed iam monſtrauimus, quod rectangulum F E B ſit ad rectangulum E D B, ſicut rectangulum A E B ad rectangulum A D B, ſcilicet maius; ac etiam quòd rectangulum E D B ſit maius duobus rectangulis C E D & C D E; & propterea multo maius rectangulis C E H & C H E. Multo igitur maius erit rectangulum FEB duobus rectangulis C E H & C H E.

Dummodo cadat punctum E inter C & H: ſi vero cadat punctū E inter C, & D erunt rectangula C E D, & C D E.



Si vero ceciderit punctum E in ipſum H punctum, tunc rectangulum F E B æquale erit duobus rectangulis C E D, & C D E; quoniam ob communem altitudinem E D, & æqualitatem linearum E D & D B, erunt duo rectangula C E D & C D E æqualia rectangulo E D B: rectangula etiam A E B & A D B, æqualia erunt; quare etiam rectangulum F E B æquale erit rectangulo E D B, & ideo duobus rectangulis C E D C D E. Sed ſi cadat punctum E in D, non datur aliud punctum F, nec rectangulum F E B; vnde nulla poteſt eſſe inæqualitas vel differentia.

Cadat demum extra lineam H D, vel in partem A H, vel D B; Dico rectangulum F E B, minus eſſe



duobus rectangulis C D E & C E D: Cùm enim rectangulum A E B ſit minus rectangulo A D B, ob maiorem diſtantiam puncti E, a puncto C; erit ex priùs demonſtratis rectangulum F E B minus rectangulo E D B. Sed rectangulum E D B eſt minus duobus rectangulis C D E & C E D; habent enim commune altitudinem E D; & minor eſt linea D B, quàm compoſita ex duabus C D & C E. Multo igitur minus eſt rectangulum F E B, quàm ſunt duo rectangula C E D, & C D E ſimul. Quod demonſtrandum erat.

Notandum eſt, quòd ita ſumi poteſt punctum E in lineâ D B, vt tertia proportionalis A F ſit maior lineâ A B; & ſic punctum F cadet vltra punctum B; Sed hoc ſuppoſito nihil mutatur ratio demonſtrationis, quemadmodum intuenti facile apparebit.

PROPOSITIO XXXXII.

Si recta linea ſecta fuerit vt ſit pars maior dupla reliquæ, ſolidum quod fit ex quadrato ſegmenti maioris in reliquum, maximum eſt omnium ſolidorum quæ fieri poſſint ex quibuſlibet ſegmentis eiuſdem rectæ.

Sicut

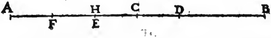


Sicut in præcedente Lemmate tres caſus occurrunt, ita in hoc Theoremate conformiter variatur demonſtratio, vti mox patebit. Sit igitur recta A B ſecta in puncto D, vt ſit A D dupla D B. Dico ſolidum ex quadrato A D in D B, eſſe maximum quod fieri poſſit ex quibuſlibet ſegmentis eiuſdem rectæ A B: Diuidatur enim bifariam in puncto C, & iterum in H, vt ſit AH æqualis H D vel D B, & ſi fieri poteſt ſit punctum E, in quo linea A B ſecta faciet ſolidum ex quadrato A E in E B rectam, maius ſolido ex quadrato A D in D B; Et primò ſit punctum E in parte H D.

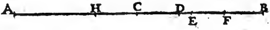
Et quoniam ſolida ſunt ad inuicem in ratione compoſitâ ex baſibus & altitudinibus; erunt hæc compoſita ex quadrato A D ad quadratum A E, & lineâ D B ad lineam E B: Fiat igitur ſicut A D ad A E, ita A E ad A F; quadratum igitur A D ad quadratum A E, eſt ſicut linea A D ad lineam A F; quare proportio iſtorum ſolidorum componitur ex rationibus A D ad A F, & D B ad E B; & ideo ſunt in ratione rectangulorum A D B, & A F E B. Sed rectangulum ex AFEB minus eſt rectangulo A E B quantitate rectanguli FEB; rectangulum vero A E B vnà cum quadrato EC, æquale eſt rectangulo A D B vnà cum quadrato D C: quanto ergo rectangulum AEB excedit rectangulum ADB, tanto quadratum C D excedit quadratum C E; Exceſſus vero quadrati CD ſupra quadratum CE, eſt æquale duobus rectangulis C E D, & C D E (puncto E exi-

ſtente inter C & D; exiſtente vero inter C & H, erit exceſſus æqualis duobus rectangulis CEH & CHE; & ſi in ipſum punctum C ceciderit, non eſt quod excedat quadratum C D, ſed rectangulum F E B maius eſt duplo quadrato C D, ſcilicet rectangulo E D B) quę demonſtrata ſunt per præcedens lemma minora eſſe rectangulo F E B. Rectangulum igitur A E B excedit rectangulum A D B minori exceſſu quàm excedit rectangulum A F E B: ac propterea Rectangulum A D B maius eſt rectangulo A F E B; & ideo ſolidum quod fit ex quadrato A D in D B lineam, maius eſt eo, quod fit ex quadrato A E in E B; quod primo demonſtrandum erat.

Demonſtratur in lemmate præcedente.



Si vero fuerit punctum E idem cum puncto H, manifeſtum eſt quod rectangulum ex A F E B erit dimidium rectanguli A D B, & ideo ſolidum ex quadrato A E in rectam E B, erit ad ſolidum ex quadrato A D in D B, in eâdem ratione, ſcilicet dimidium: & ſic ſemper minus quanto propinquius fuerit ſecta ad terminum A.



Sit denique punctum E in parte D B, & ſupponatur quòd ſolidum ex quadrato A E in rectam E B, maius ſit vel æquale ſolido ex quadrato A D in D B; & fiat ſicut AD ad AE ita AE ad A F; & ex demõſtratis in lem-

mate

Digitized by Google

mate erit ſolidum ex quadrato A D in D B, ad ſolidum ex quadrato A E in E B, ſicut rectangulum A D B ad rectangulum ex A F in E B; ſed rectangulum A E B minus eſt rectangulo ex A F in E B, quantitate rectanguli F E B; minus vero rectangulo A D B, quantitate duorum rectangulorum C D E & C E D; ſed demonſtrauimus, quòd rectangulum F E B minus ſit duobus rectangulis C D E, C E D; quare maior eſt exceſſus rectanguli A D B ſupra rectangulum AEB, quam rectanguli A F E B ſupra idem rectangulum A E B. Rectangulum igitur A D B maius eſt rectangulo AFEB; & ideo ſolidum ex quadrato A D in D B, maius ſolido ex quadrato A E in E B, quod demonſtrandum erat. Maximum igitur eſt ſolidum quòd fit ex quadrato A D in D B, omnium quæ fieri poſſunt ex ſegmentis eiuſdem rectæ A B; quod demonſtrare oportuit.

COROLLARIVM.

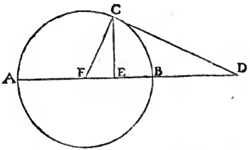
Liquido etiam conſtat ex præmiſsis, quòd quo propius ſectio fiet in lineâ A B ad punctum D, modo ſectiones ſint in eâdem parte lineæ, eo maius erit ſolidum ex illis ſegmentis factum.

PROPOSITIO XXXXIII.

Si circulum tangens recta linea cum diametro productâ conueniat, & a puncto contactus ad diametrum demittatur per

pen-

pendicularis; diameter ita diuidetur a perpendiculari, vt ſit pars maior ad minorem, ſicut tota cum productâ ad productam.



SIt enim Circulus ACB, quem tangat linea CD in puncto C, conueniens cum diametro AB productâ in puncto D, & a C puncto in diametrum AB demittatur perpendicularis CE. Dico ſicut AD ad DB ita eſſe AE ad EB.

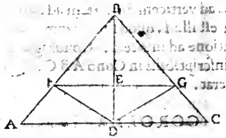
Ducatur enim a centro F ad punctum C contactûs linea FC; & quoniam angulus FCD eſt rectus, ſi ſuper diametro FD deſcribatur circulus, tranſibit per punctum C, & ideo quadratum CE æquale erit rectangulo FED. Eſt etiam idem quadratum EC æquale rectangulo AEB; quare ſicut DE ad EB, ita AE ad EF; & diuidendo ſicut DB ad BE, ita AF ad FE; & permutando ſicut DB ad AF, ita BE ad FE; & ad conſequentium dupla ſicut DB ad BA, ita BE ad duplam EF; & componendo ſicut DA ad AB, ita

BE

BE cum duplâ EF (hoc eſt AE) ad duplam EF; & per conuerſionem rationis ſicut DA ad DB, ita AE ad exceſſum ſuum ſupra duplam EF, hoc eſt EB. Eſt igitur ſicut AD ad DB, ita AE ad EB, quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO XXXXIV.

Maximus conus qui poterit inſcribi in quocunque Cono eſt, quando baſis inſcripti diuidit axem circumſcribentis, ita vt ſegmentum ad verticem ſit duplum reliqui.



Eſto enim Conus ABC, cuius axis BD ſecetur in puncto E, vt ſit pars BE dupla partis ED; & per punctum E tranſeat planum baſi AC parallelum, faciens in Cono ABC circulum FG, qui ſit baſis Coni inſcripti FDG. Dico Conum inſcriptum FDG eſſe maximum, qui poterit inſcribi Cono ABC.

Quoniam enim ratio Coni ABC ad Conum FDG,

componitur ex ratione baſis A C ad baſim F G, & altitudinis B D ad altitudinem E D; baſis verò A C eſt ad baſim F G in duplicatá ratione radiorum ſuorum A D & F E, vel B D ad B E, hoc eſt ſicut quadratum B D ad quadratum B E; altitudines vero ſunt lineæ B D & D E. Ratio igitur Coni A B C ad Conum F D G, componitur ex quadrato B D, ad quadratum B E, & lineâ B D ad lineam E D; ſed quadratum B D in B D facit Cubum ex B D; & quadratum B E in E D facit maximum ſolidum, quod ex ſegmentis eiuſdem B D fieri poteſt; & propterea conus F D G (cum ſit compoſitus ex iiſdem rationibus) eſt maximus conus qui poterit inſcribi in Cono A B C. Omnes enim coni vtcunque inſcripti habent rationem compoſitam ex ſegmentis axis B D: ſicut ſolida, quæ fiunt ex quadratis partis ad verticem in partem ad baſim; quorum maximum eſt illud, quod fit ex ſegmentis, quæ ſunt in dupla ratione ad inuicem. Conus igitur F D G eſt maximus inſcriptibilis in Cono A B C. Quod demonſtrandum erat.

42. huius.

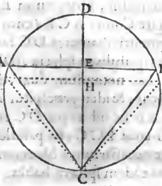
COROLLARIVM.

Euidens eſt ex demonſtratis, quòd Conus A B C ſit minimus, qui circumſcribere poſſit Conum F D G. Si enim non fuerit minimus, foret alius, cuius axis vel maior vel minor eſſet axe B D; quo ſuppoſito pars B E non foret dupla E D; & ſic ſequeretur abſurdum.

PRO-

PROPOSITIO XXXXV.

Maximus in ſphærâ inſcriptus Conus, eſt, qui habet axem ſuum duplum reliquæ partis axis ſphæræ.



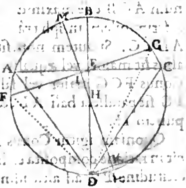
SIt ſphæra ADBC, cuius axis DC diuiſus ſit a puncto E, vt ſit CE dupla DE, & per E tranſeat planum AB ad axem rectum, ſecãs ſphæram ADBC, facienſque in eâ circulum qui baſis ſit Coni ACB. Dico conum ACB eſſe maximũ inſcriptibilem in ſphærâ ADBC. Si autem non ſit maximus, oportet quod alius ſit maior, vel æqualis. Sit igitur (ſi fieri poteſt) Conus FCG maior vel ſaltem æqualis; cuius baſis FG ſit parallela baſi AB, & ſecet diametrum DC in puncto H.

Quoniam igitur Conus ACB ad Conum FCG, eſt in ratione compoſita ex baſe AB ad baſim FG, & altitudine EC ad altitudinem HC; baſes verò ſunt ſicut quadrata radiorum ſuorum, hoc eſt ſicut rectangulum CED ad rectangulum CHD; compoſita igitur eſt ratio Coni ACB ad Conum FCG, ex ratione

Q rectan-

rectanguli CED ad rectangulum CHD, & lineæ EC ad lineam HC; hoc eſt ſicut ſolidum ex CED in EC, ad ſolidum ex CHD in HC. Sed ſolidum ex CED in EC, idem eſt ac ſolidum ex quadrato CE in ED; & ſolidum ex CHD in HC, eſt ſolidum ex
42. huius. quadrato HC in HD. Sed iam demonſtratum eſt, quòd ſolidum ex quadrato EC in ED, ſit omnium quæ fieri poterunt ex ſegmentis eiuſdem lineæ CD, maximum, (pars enim EC eſt dupla partis ED.) Quare Conus ACB (cum omnes ſint ſicut ſolida ex ſegmentis diametri DC facti) eſt omnium maximus inſcriptibilis in ſphæra ADBC; quod erat propoſitum.

Hic notandum duxi, quòd ſolum de conis rectis agatur; & ideo præcipitur in conſtructione, quòd baſis AB ſit ad axem DC recta, ac etiam quòd baſis FG coni FCG, ſit parallela baſi AB, etiamſi non erat neceſſarium. Nam omnis Conus Scalenus inſcriptus eâdem ſphæra habẽs verticem C; erit minor cono recto maximo ACB. Quod ſic demonſtrabitur. Sit enim ſphæra ABCD, cuius axis BD, in quâ inſcribatur Conus maximus ADC, cuius axis ED, & concipiatur in eâdẽ ſphærâ inſcriptus conus Scalenus FDG, cuius idem vertex D, centrum baſis I, per quod tranſeat diameter ſphæræ LHIM. Dico Conum ſcalenum



FDG minorem eſſe cono recto ADC. Ducatur igitur per D verticem, planum parallelum baſi coni FDG, ſecans diametrum ML in puncto K. Et ſupponatur quod ſuper baſi FG & in altitudine IL, conſtitutus fuerit conus rectus, qui cum ſit in eâdem ſphærâ, non poteſt eſſe maior cono ADC; ſed conus FDG, erit minor cono illo cùm conſiſtat ſuper eâdem baſi FG, & in minore altitudine, ſcilicet IK. Minor igitur eſt conus Scalenus FDG cono recto ADC, quod erat demonſtrandum. 11. lib. 12. Euclid.

PROPOSITIO XXXXVI.

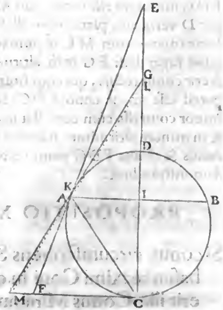
Si conus circumſcribens Sphæram tangat baſim maximi Coni in eadem inſcripti, erit ille Conus Minimus circumſcriptibilis circa eandem ſphæram.

SIt circulus ADBC, cuius diameter CD diuiſa in I, vt ſit CI dupla ID, & ab I puncto erecta ſit perpendicularis ad diametrum IA, cui parallela ducta ſit CH, & in A puncto tangat circulum recta FAE, concurrens cum diametro CD productâ, & cum lineâ CH parallelâ IA in puncto F. Dico conum ex reuolutione trianguli EFC factum circa axem EC, eſſe minimum circumſcriptibilem circa ſphæram ex reuolutione circuli ADBC factam.

Quoniam enim linea EA tangit circulum ADBC in puncto A, & a contactu demiſſa eſt perpendicula-

Digitized by Google

ris diametro C D in I, ac etiam cum diametro C D productâ concurrit in E puncto, erit ſicut C I ad I D, ita C E ad E D; quare cum (per conſtructionem) C I ſit dupla I D, erit C E dupla E D; & E D vnà cum D I hoc eſt E I, erit dupla I C.
43. huius.



Quare Conus factus ex reuolutione triãguli A I C erit maximus inſcriptibilis in Cono ex reuolutione trianguli E F C, cum E I ſit dupla I C; ideoque Conus ex reuolutione trianguli EFC factus erit minimus circumſcribens conum ex reuolutione trianguli A I C factum.
44. huius.

Supponatur autem quòd non ſit minimus circumſcriptibilis circa ſphæram ex reuolutione circuli A D B C, ſed quòd conus tangens ſphæram in K puncto foret minor: Ducatur igitur G K H linea tangens circulum A D B C in K puncto, & conueniens cum axe C D producto in G, & cum lineâ H C parallelâ A I in H: Supponatur etiam quòd per A punctum tranſeat linea L A M, parallela ipſi G K H; & quòd ex reuolutione triangulorum G H C, & L M C, facti ſint

duo

duo coni. Manifeſtum eſt iam quòd Conus ex GHC, maior erit cono ex L M C facto. Sed conus factus ex reuolutione trianguli A I C, maximus eſt inſcriptibilis in cono ex reuolutione trianguli E F C; quoniam E I eſt dupla I C; ſecus verò ſe habet ad conum ex reuolutione trianguli L M C, in quo etiam inſcribitur; nam L I linea, vel maior, vel minor, erit lineâ E I, Quare minorem rationem habet Conus ex triangulo A I C, ad conum ex reuolutione L F C, quam ad conum ex reuolutione trianguli E F C. Maior igitur eſt conus ex L M C, quàm conus ex E F C; & multo maior erit conus ex reuolutione trianguli G H C, qui tangit ſphæram in K, quam conus ex reuolutione trianguli E F C, qui tangit baſim maximi coni in ſphæra A D B C inſcripti: quod demonſtrandum erat. 44. huius.

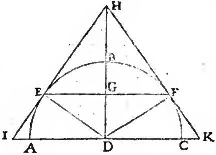
PROPOSITIO XXXXVII.

Hemiſphærio circumſcribere Conum Minimum.

SIt Hemiſphærium A B C, in quo ſit inſcriptus conus maximus EDF, cuius baſis EF ſecet axem hemiſphærij BD in G, vt ſit quadratum BD triplum quadrati D G. Sit etiam conus I H K, circumſcribens Hemiſphærium tangenſque ipſum in circulo E F, qui baſis eſt coni Maximi E D F, Dico Conum I H K, eſſe minimum circumſcriptibilem circa Hemiſphærium A B C. Per 12. huius.

Quoniam enim angulus I E D eſt rectus, erit tri-

angu-



angulum HED ſimile triangulo EDG; & ideo ſicut HD ad DE, ita DE ad DG; & ſicut quadratum DE, vel BD, ad quadratum DG, ita linea HD ad lineam GD. Sed quadratum BD eſt triplum quadrati GD: quare linea HD eſt tripla lineæ GD, & HG dupla ipſius GD: Igitur & Conus EDF maxi-
44. huius. mus conus inſcriptibilis cono HIK. Sed Conus HIK tangit & circumſcribit Hemiſphærium ABC. Quare per ea quæ in præcedente demonſtrata ſunt, euidentiſſimum eſt, quòd nullus minor conus ipſum circumſcribere poſſit.

COROLLARIVM.

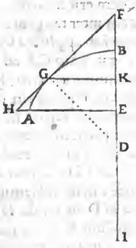
Eadem prorſus eſt ratio circumſcribendi ſphęroides vel Hemiſphæroides, quæ ſphæram vel hemiſphęrium. Nam ab Appollonio propoſitione 34. libri primi demonſtratum, eſt quòd, ſi recta linea contingat Ellipſim cum diametro productâ conueniens, & a puncto contactûs ordinatim applicetur linea ad diametrum,

eadem erit ratio diametri productæ ad partem interceptam inter tangentem & ſectionem, quæ partium diametri ab applicatâ ſectarum; ſicut in ſuperiore de ſphærâ erat ratio CE ad ED, vt CI ad ID. Sectâ igitur primum diametro (ſphæroidis quidem vt ſit tota ad partem ſuperiorem tripla ſicut CD ad DI, Hemiſphæroidis vero vt ſit quadratum totius triplum quadrati partis inferioris, quemadmodum BD, GD;) & productâ in ſphæroide, donec fiat CE ad ED, ſicut CI ad ID; vel tota CE tripla CI; & in Hemiſphæroide, ſicut in Hemiſphærio, donec tota cum productâ HD ſit tripla DG: neceſſarium erit idem eſſe punctum E in axe producto ſphæræ vel ſphæroidis, ac etiam in axe Hemiſphæroidis vel Hemiſphærij producto punctum H; alioqui non foret eadem ratio totius diametri cum productâ ad productam, quæ partium diametri ab applicatâ diuiſarum quæ à contactu ducitur; ſicut ab Appollonio loco citato demonſtratum eſt.

PROPOSITIO XXXXVIII.

Circa datam Portionem minorem Hemiſphærio circumſcribere conum Minimum.

Concipiatur factum, & quod omnia ſecta ſint plano per axem; vnde ſit AB dimidium peripheriæ portionis, & HFE dimidium trianguli per axem;



ex ſectione coni facti, cuius latus HF contingat peripheriam A B, diuiſum a puncto contactus G, vt ſit pars F G dupla GH: producta ſit iam FE in I, vt ſit BI diameter ſphæræ, vel circuli cuius A B eſt portio; & a G ad illam demittatur perpendicularis G K; & ad centrũ D linea GD.

Et quoniam angulus FGD eſt rectus, circulus ſuper diametro F D tranſibit per punctum G; vnde manifeſtum eſt quod rectãgulum FKD, æquale ſit rectangulo IKB; ambo enim æqualia ſunt quadrato GK; addito igitur quadrato KD, erit rectangulum FDK æquale quadrato BD; quanto ergo quadratum BD excedit quadratum ED, tanto rectangulum FDK, excedit idem quadratum ED; Sed rectangulum FDK, æquale eſt rectangulo FDE; vnà cum rectangulo ex FD & EK, hoc eſt rectangulis FEK & DEK; & rectangulum FDE, æquale eſt rectangulo FED vnà cum quadrato ED; rectangulum verò FED eſt triplum rectanguli KED, (FE enim tripla eſt KE). Conſtat ergo quod quatuor rectangula KED vnà cum rectangulo FEK, æqualia ſint exceſſui rectanguli FDK, vel quadrati BD ſupra quadratum ED. Notus verò eſt exceſſus quadrati BD ſupra quadratum ED quare reliqua non latebunt.

Ap-

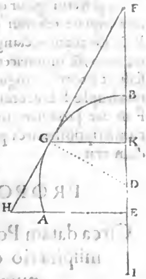
Applicetur igitur quadruplo E D notæ, rectangulum æquale exceſſui quadrati B D ſupra quadratum E D, excedens rectangulo ſimili rectangulo F E K ſpecie noto; & innoteſcet linea F E, vnà cum linea E K, ſcilicet latera rectanguli, quo rectangulum applicatum quadruplæ E D excedit ipſum. Inuento igitur puncto F in axe producto, inuentus eſt Conus Minimus circumſcriptibilis circa portionem datam. Quod faciendum erat. 29.6. Eucl.

PROPOSITIO XLIX.

Circa datam Portionem Maiorem Hemiſphærio circumſcribere Conum Minimum.

SVpponatur iterum factum, & ſecta omnia plano per axem; vnde ſit A G B dimidium peripheriæ, & F H E dimidium trianguli facti ex ſectione coni & portionis per axem; quare linea F H tangens peripheriam in G diuiſa erit, vt pars F G ſit dupla partis G H; & a G puncto ducta ſit ad axem B E perpendicularis G K, & iterum ad centrum D linea G D, & producatur B E in I, vt ſit B I diameter circuli cuius pars eſt peripheria A G B: Manifeſtum eſt iam quòd angulus F G D ſit rectus, & quòd rectangulum F K D ſit æquale rectangulo I K B; ac etiam quòd rectangulum F D K ſit æquale quadrato B D. Quantum igitur quadratum B D excedit quadratum D E, tantum rectan- In præcedente 48. probatur.

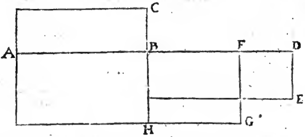
gulum FDK excedit idem quadratum DE. Sed rectangulum FED vnà cum rectangulis FDK & KED ſimul, æqualia ſunt rectangulo FEK vna cum quadrato DE; dempto igitur ex vtroque quadrato DE, erit rectangulum FEK æquale rectangulis FED & KED vnà cum rectangulo FDK, minus quadrato DE; vel (quod idem eſt) exceſſui rectanguli FDK, vel quadrati BD ſupra quadratum DE. Rectangula vero FED, & KED ſunt quatuor rectangula KED; FE enim tripla eſt KE. Quatuor igitur rectangula KED, vnà cum exceſſu rectanguli FDK vel quadrati BD ſupra quadratum DE ſimul, æqualia ſunt rectangulo FEK. Fiat igitur linea AB quadrupla DE, ſuper quâ conſtruatur rectangulum AC æquale exceſſui quadrati BD ſupra quadratum DE; iam productâ AB quantum opus in D, fiat rectangulum BE æquale rectangulo AC, & ſimile rectâgulo FEK ſpecie noto; datâ iam BD mediâ proportionali, inueniantur extremæ, quarum differentia AB, ſcilicet AF & BF; & iterum ſuper lineâ AF conſtituatur rectangulum AG, ſimile rectangulo BE vel FEK, & productâ CB in H, Dico.



Vide infra in Lemmate ante Prop. 74.

Quoniam rectangulum BE ſimile eſt rectangulo AG, erit rectangulum BE ad rectangulum AG, ſi-

cut



cut quadratum B D ad quadratum A F, hoc eſt ſicut linea B F, ad lineam A F, vel ſicut rectangulum B G ad rectangulum A G. Sed rectangulum B E per conſtructionem æquale eſt rectangulo A C. Igitur rectangulum B G æquale eſt eidem rectangulo A C, & æquale exceſſui quadrati B D ſupra quadratum D E. Lineæ igitur A B, vel quadruplæ D E productæ, applicatum eſt rectangulum ſimile rectangulo F E K excedens rectangulo B G æquali exceſſui quadrati B D, ſupra quadratum D E. Vnde neceſſariò ſequitur, quòd rectangulum A H ſit æquale quatuor rectangulis KED; Et igitur quòd latus B H, vel F G, ſit æquale lineæ K E: Impoſſibile eſt enim conſtruere aliud rectangulum ſimile rectangulo A G & applicatum lineæ A B, cuius exceſſus ſit æqualis rectangulo B G. Inuentum eſt igitur punctum K, & inde punctum F in axe producto, a quo ducta tangens & producta in concurſum cum baſi E A productâ in H, erit diuiſa in contactu G, vt ſit F G dupla G H; vnde inuentus eſt Conus Minimus circumſcribens Portionem ſphæræ datam: quod facere oportebat.

Quemadmodum obſeruauimus in Coroll. Prop. 47. quòd eadem erat ratio demonſtrationis de conis minimis circumſcribentibus Sphæroidem, quæ Sphæram, ſicut etiam de maximis inſcriptis; ita nunc obſeruandum duxi eandem eſſe rationem circumſcribendi, & inſcribendi portiones earundem, quæ portiones ſphęræ: Nihil enim aut mutandum aut addendum eſt præcedentibus demonſtrationibus, præterquam quod quando dicitur rectangulum F K D æquale eſſe rectangulo I K B (quia æquale quadrato G K) iam dicendum ſit (propter eandem rationem quam habent ad quadratum G K;) vnde etiam probatur eorum ad inuicem æqualitas: in ſingulis vero reliquis in demonſtratione prolatis, concordat pariter demonſtratio cũ portionibus ſphæroidum, ſicut & ſphæræ.

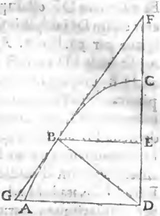
PROPOSITIO L.

Conôidi Parabolico circumſcribere Conum Minimum.

SIt ſemiparabola A B C, cuius axis C D ſectus ſit bifariam in E puncto, a quo ducta ſit perpendicularis E B concurrens cum ſectione in B: producto iam axe quantum opus, fiat F C æqualis C E, & a puncto F, ad B, ducta ſit recta & producta donec concurrat cum baſi D A productâ in G; ductâ etiam B D, concipiantur reuolui omnia circa axem F D, vnde facta ſint Conoides Parabolicum ex reuolutione ſemi-

para-

parabolæ A B C, & Conus ex reuolutione trianguli F G D, circa axem manentem F D. Manifeſtum eſt quod Conus factus ex triangulo FGD, tangat Conoïdes Parabolicū factum ex reuolutione ſemiparabolæ A B C: linea enim F B propter æqualitatẽ linearum F C & C E, & ordinatim applicatam B E, tangit ſectionem A B C in B puncto; & quoniam F B eſt dupla B G, erit Conus ex F G D factus, minimus circumſcribens conum ex B D E factum. Quare ex demonſtratis ſequitur, quod F G D minimus ſit circumſcriptibilis; & quòd Conus ex BDE ſit Maximus inſcriptibilis in eodem Conoide Parabolico. Quod &c.

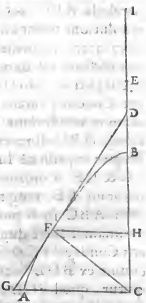


Per 35. lib. 1. Appollonij.

PROPOSITIO LI.

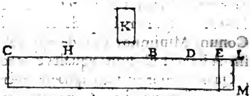
Conoidi Hyperbolico circumſcribere Conum Minimum.

Sit Semihyperbola A B cuius axis BC, tranſuerſa diameter B I, & centrum E; ducta autem ſit tangens D F G, quæ tangat ſectionem in F, vt ſit pars D F dupla partis F G; (quomodo autem hoc fiat mox apparebit:) ab F autem ſit ordinatim applicata F H;



Et quoniam D F eſt dupla F G, erit etiam DH dupla HC. Cum igitur per 36. lib. 1. Appollonij ſit ſicut I D ad D B, ita I H ad H B, propter ordinatim applicatam FH a contactu ad diametrum B C; erit componendo ſicut I B ad B D, ita I H & H B tanquam vna ad H B; & antecedentium dimidia, ſicut E B ad B D, ita E H ad H B; & per conuerſionem rationis ſicut E B ad E D ita E H ad E B; & inuertendo ſicut E D ad E B, ita E B ad E H; quare E B eſt media proportionalis inter EH & E D. Cum igitur notæ ſint rectæ C E, & E B, cuius quadrato æquale eſt rectangulum H E D; Applicetur ad datam C E, rectangulum æquale quadrato E B, vnà cum dimidiâ eiuſdem, excedens rectangulo ſimili rectangulo cuidam K, ſimiliterque poſito, (cuius latus maius ſit duplum minoris) quod ſit C M, cuius exceſſus E M ſit rectangulum ſimile rectangulo K; Inuento iam lateri L M fiat E D æqualis, & tertia pars C D ſit CH. & B E media proportionalis inter H E & E D: Quoniam igitur rectangulum C M æquale eſt quadrato B E vnà cum dimidio eiuſdem, hoc eſt in ratione ſeſquialtera; & latus C I eſt ſeſquialterum lateris vel lineæ H E (eſt enim H D dupla C H, & D E dupla

E L,



EL, & compoſita igitur ex H D D E dupla compoſitæ ex C H & E L.) Rectangulum igitur C M, ſeſquialterum eſt rectanguli H N, vel quadrati B E. Inuenta igitur ſunt in lineâ C E notâ, puncta H & D: vnde manifeſtè apparet quòd tangens, ducta a puncto D in tranſuerſâ diametro, ad baſim CA ſectionis productam in G, tanget ſectionem in F, vt ſit pars D F dupla partis F G. Si igitur conuertantur circa axem D C triangulum D G C, & ſemihyperbola B A, facta erunt Conoides Hyperbolicum, & Conus Minimus circumſcriptibilis circa ipſum; & ſi ab F ducta fuerit linea F C, ex reuolutione trianguli F H C fiet etiam Conus Maximus inſcriptibilis in eodem Conoide Hyperbolico, quemadmodum ex ſupra demonſtratis manifeſtè apparet.

Finitis iam quantum opus de inſcriptione, & circumſcriptione Conorum circa ſolida rotunda, vel in ſolidis rotundis, ex reuolutione curuarum, ſiue ex circulis, vel ex coni ſectionibus genitis, iam conſequens videtur aliquid de circumſcriptione & inſcriptione eorundem ſolidorum in conis & circa conos demonſtrare; in quibus ob facilitatem breuis eſſe conabor: Primò igitur notandum eſt, quod minimus conus circumſcribens ſphæram ſit conus factus ex reuolutione

trian-

trianguli rectanguli, cuius Hypotenuſa eſt tripla baſis: quod intuenti figuram Prop. de circumſcribendo ſphæræ Conum Minimum liquide apparebit; in figura enim A F, & F C, ſunt æquales & ideo E F tripla F C. Quare maior eſt ratio ſphæræ inſcriptæ tali cono, quam cuicunque alio. Conorum verò inſcriptorum in ſphærâ maximus eſt ex triangulo, cuius laterum quadrata ſunt in ratione ſicut 1. 2. & 3. hoc eſt in ratione laterum Cubi & Pyramidis in ſphærâ inſcriptorum & diametri eiuſdem ſphæræ; quæ etiam eſt ratio laterum trianguli genetricis maximi coni inſcripti Hemiſphærio, ſicut ad propoſitionem 13. adnotauimus; Quare ſi conus factus ex triangulo, cuius latera non ſint in illa ratione, vel inſcripti ſphęræ vel Hemiſphærio; tunc ſphæra vel Hemiſphærium illis circumſcribens non erit Minimum, ſed ſphæroides vel hemiſphæroides aliquod erit minus. Quamuis autem in omni cono recto inſcribi poterit vel Sphæra, vel Hemiſphærium, vel Portio quæuis alia ſphæræ; attamen quilibet conus proprietatem habet peculiarem ad inſcribendas portiones ſphærarum; hoc eſt vt cuilibet portioni conueniat Conus Proprius, qui inſcribendis portionibus minorem rationem habeat quouis alio, circumſcribendis vero portionibus omni alio maiorem; & ideo vocari poteſt Conus Proprius.

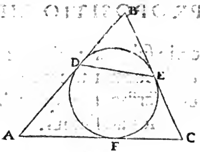
46 huius

quoniam ſunt tangentes.

Conus proprius minor eſt omni alio cono circumſcribente eandē portionem.

Obſeruandum etiam duxi quòd cono Scaleno inſcribi non poſſit ſphæra, quod ſic demonſtrabitur. Supponatur enim ſi fieri poteſt, quod in cono Scaleno A B C, inſcripta fuerit ſphæra D E F, & ſecentur ambo plano per axem iuxta maximam & minimam lineam

in ſu-

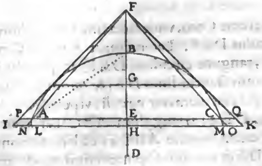


in ſuperficie Coni, vnde facta ſint triangulum A B C, & circulus D E F. Latera igitur A B & B C trianguli A B C, tangunt circulum D E F, in punctis D & E, quæ connectantur linea D E; & quoniam linea D E, in ſphærâ erat diameter circuli, vtpote ſecta plano per lineam D E ad triangulum A B C per axem recto; quare etiam in cono A B C ex eâdem ſectione per lineam D E fit circulus (oportet enim quod circumſcriptus conus tangat inſcriptam ſphæram per circulum.) Sectio igitur cum ſit circulus, eſt ſubcontraria baſi A C, & latera trianguli D B E, ſcilicet D B ad B E, ſicut C B ad B A trianguli A B C; quare latus B E maius eſt latere B D. Sed ſunt æquales, propterea quòd tangant circulum D E F, ductæ ab eodem puncto B; quare ſuppoſitio falſa eſt, & Sphæra non poteſt inſcribi Cono Scaleno, ita vt tangat illum in circulo ſicut propoſitum erat.

Apoll. Conic. lib. 1. prop. 5.

PROPOSITIO LII.

Minor portio ſphæræ maiorem rationem habet ad Conum ſuum Proprium circumſcribentem quam Maior ad ſuum.



SIt Portio Sphæræ ABC cuius centrum D, axis BE productus in F, vt ſit FB ad BE, ſicut quadratum ex AB ad duplum quadrati ex AE, & circa axem FE & ſuper baſi portionis AC fiat conus AFC; qui propterea æqualis eſt Portioni ABC; & quoniam ex ijs quæ iam demonſtrauimus (diuiſâ BE bifariam in G) eſt ſicut FD ad BD, ita BD ad GD, erit FB maior quam BG. Diuidatur itaque bifariam FG, & æqualis dimidiæ fiat GH; quare FG eſt dupla GH. Per H iam agatur planum parallelum baſi AC, & circa axem FH & ſuper eodem plano conſtituatur conus IFK, tangens portionem ABC, quæ produca-

Per 2. partem Coro. 30. huius.

In 30. huius.

tur vſque ad planum I K, in L, & M, & conus A F C in N, & O, in eodem plano: Quoniam enim eſt ſicut F D ad B D, ita B D ad G D, & ita F B ad B G; erit componendo ſimul F D & B D, ad B D & G D, ſimul, ſicut F B ad B G; quare ſi planum baſi parallelum tranſibit per G punctum, interſecabit in contactu Conum I F K cum portione L B M, & ſecabit latera eius in eâdem ratione qua axis F H in puncto G, ſcilicet vt pars ad verticem ſit dupla reliquæ ad baſim; vnde manifeſtum eſt quod conus I F K ſit minimus circumſcriptibilis, vel conus proprius Portionis LBM. Producatur etiam planum A C ad interſectionem conii I F K in P & Q, & Conus A F C producatur ad planum I K, & fiat Conus N F O. Per 43. & 48. & 49. huius.

Quoniam igitur Conus A F C eſt æqualis portioni A B C, & ad Conum P F Q, habet rationem quadrati AE ad quadratum PE; Portio ABC ad eundem conum P F Q habet eandem rationem quadrati A E ad quadratum P E; Conus verò N F O ad conum I F K eandem rationem habet, quam Portio A B C ad conum P F Q, (eſt enim N H ad I H, ſicut A E ad P E.) Sed conus N F O maior eſt portione L B M, quoniam maius eſt incrementum ſolidi contenti inter plana A C & N O in Cono quàm in portione; Maior enim eſt baſis N O quàm L M; & ideo maiorem rationem habet conus N F O, ad conum I F K; quàm habet portio L B M ad eundem conum I F K. Sed ſicut conus N F O ad conum I F K; ita eſt portio A B C ad conum P F Q; Maiorem igitur rationem habet minor portio A B C ad conum P F Q, quàm maior portio L B M,

ad Conum ſuum proprium circumſcriptum I F K, qui minimus eſt circumſcriptibilis circa eam. Sed Conus P F Q non eſt conus Proprius portionis A B C, & ideo maior eſt cono proprio; multo igitur maiorem rationem habet Minor Portio A B C ad conum ſuum Proprium, quam habet Maior portio L B M ad Conum ſuum Proprium I F K, quod erat propoſitum demonſtare.

COROLLARIVM.

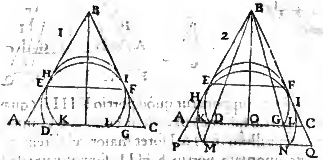
Ex hoc colligitur, quod ſicut in Minoribus Portionibus, maior eſt ratio portionis ad Conum Proprium circumſcribentem, ita ad Maximos Conos inſcriptos maiorem etiam rationem habebunt Minores Portiones, quàm Maiores;

Notandum etiam eſt, quòd tota hæc demonſtratio de proportione portionum Sphærarum ad conos ſuos proprios conueniat etiam ad demonſtrandam proportionem, quæ habetur in portionibus Sphæroidum, ſcilicet quòd minor portio ſphæroidis ad conum ſuum Proprium maiorem rationem habeat quam maior ad ſuum.

PROPOSITIO LIII.

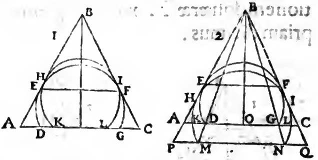
Cuicunque Cono recto cuius trianguli genitricis Hypotenuſa non ſit maior quàm tripla baſis, inſcribere Sphæram vel por-

tionem ſphæræ Maximam quam Propriam dicimus.



NOtandum eſt, quòd etiamſi in præcedentibus de Conis Proprijs circumſcribentibus Sphæram & ſphærarum Portiones loquuti ſimus, & naturã eorum declarauimus, ex quibus ſatis manifeſtum eſt vnde ſic vocentur; attamen nunc de inſcribendo Sphæras & ſphærarum portiones acturi, licebit hic explicare etiam naturam earum quæ inſcribendæ ſunt; quæ maximè conſiſtit in eo quòd ſint portiones maximæ. Et licet in eodem Cono (nec non in omni) inſcribi poterit Sphæra, vel quæuis alia portio ſphæræ; ſemper tamen, quæ Propria vocatur, erit maior ſphærâ, vel quâcunque aliâ portione ſphæræ in eodem cono inſcribendâ.

Sit igitur in figura prima Conus rectus A B C, & in eo inſcripta Portio Sphæræ D E F G tangens conum in E, & F, ita vt pars E B, vel F B ſit dupla reliquæ E A vel F C. Dico Portionem D E F G, eſſe Propriam & maximam inſcriptibilem in cono A B C. Si enim non



ſit maxima, ſupponatur quòd portio K H I L (quæ ſit maior portio ſphæræ) in eodem cono A B C inſcripta & tangens illum in H & I foret maior vel ſaltem æqualis. Et quoniam portio K H I L ſupponitur eſſe Maior portio Sphæræ (maiores autem vocentur portiones illæ ſphærarum quæ maiorē rationem habent ad ſphęras quarum ſunt partes) quàm ſit portio D E F G, habebit ad conum ſuum proprium minorem rationem quàm habet portio DEFG, ad conum ſuum proprium A B C. Sed conus A B C maior eſt cono proprio portionis K H I L; tangit enim eam. Multo igitur maiorem rationem habet portio D E F G, ad conum ABC, quàm portio K H I L ad eundem conum A B C. Maior eſt igitur portio D E F G portione K H I L; quod primo demonſtrandum erat; Non maior eſt igitur Maior portio ſphæræ.

Per præcedentem.

Vide 51. de Cono verſus finem.

Supponatur iam quòd Portio Minor Hemiſphærij poſſit eſſe Maior portione D E F G, quæ ideo tanget conum A B C, infra planum E F, in punctis H & I, & ſit iterum in ſecunda figura portio K H I L: Fiat autem ſuper baſi portionis DEFG conus ei æqualis DBG,

& cir-

& circa eundem axem B O conus proprius A B C tangens portionem D E F G (non refert autem vtrum conueniat in eodem puncto B an non.) Producatur iam portio K H I L vltra baſim A C & fiat ſimilis portioni D E F G, quæ ſit M H I N; Ducatur etiam per M N planum parallelum baſi A C productum vſque in concurſum coni A B C producti in P & Q.

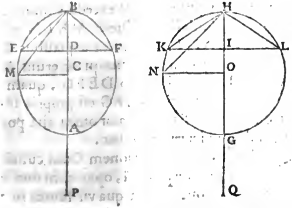
Quoniã igitur Conus DBG æqualis eſt Portioni DE. FG, erit & conus MBN æqualis portioni M H I N, ſunt enim viciſſim ſimiles & coni & portiones & ideo alternatim æquales ſuper iiſdem baſibus conſtituti. Sed portio M H I N, excedit portionem K H I L maiori exceſſu, quàm Conus M B N excedit Conum D B G; Pars enim portionis ſignata literis M K L N, maior eſt parte coni M D G N. Quare ex æqualibus deductis inæqualibus quæ remanent inæqualia erunt, & Maior erit Conus D B G vel Portio D E F G, quam Portio K H I L. Igitur portio D E F G eſt propria inſcriptibilis Cono dato A B C, & maior omni aliâ portione inſcribendâ quod fieri oportebat.

Quoad vero circumſcriptionem Coni cuiuſcunque dati portione ſphæræ propriâ, opus mihi non videtur aliâ demonſtratione, quàm quã vſi ſumus in præcedentibus. Circumſcribatur enim primo conus datus cono minimo, deinde in eodem Cono Minimo inſcribatur Portio propria, & illa Portio erit propria & minima circumſcribens conum datum; quod ſatis manifeſte apparebit ex præmiſſis. Iam vero videamus quid de ſphæroidibus & de inſcribendis & circumſcribendis Conis circa illa dicendum ſit.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

Si Sphæroides ſecetur plano ad axem recto vtcunque, ſecta autem fuerit & ſphęra plano, vt ſint ſegmenta axium vtriuſque in eâdem ratione, Portiones Sphæroidis ſunt ad inuicem, ſicut ſunt Portiones Sphæræ.



SIt enim Sphæroides, cuius axis A B, centrum C ſectum vtcunque plano ad axim recto per punctum D, faciente ſectionem E F baſim communem Portionum E B F, & E A F. Sit etiam Sphæra, cuius axis G H ſectus ſit in eâdem ratione in puncto I, quâ ſectus eſt axis A B in D; & per punctum I agatur pla-

num

num ad axem rectum KL: Secentur omnia plano per axem in vtroque Sphæroide & Sphærâ, & ab vtriuſque centro C, & O, erigantur perpendiculares CM, & ON.

Et quoniam eſt AD ad DB, ſicut GI ad IH, & diuiſæ ſunt AB & GH bifariam in C & O; erit ſicut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita rectangulum GIH ad rectangulum GOH; compoſita ſunt enim ex iiſdem proportionibus. Sed ſicut rectangulum ADB ad rectangulum ACB, ita eſt quadratum ED ad quadratum MC, & ita etiam quadratum KI ad quadratum NO. Ductis iam lineis NH & KH, in circulo, & MB, & EB in Ellipſi, concipiantur ex reuolutione triangulorum NHO, KHI, EBD, & MBC, fieri quatuor Coni; qui quoniam bales eorum ſunt proportionales, videlicet baſis ex KI ad baſim ex NO, ſicut baſis ex ED ad baſim ex MC; ac etiam altitudines IH ad OH, ſicut DB ad CB; erunt Coni ex illis facti etiam proportionales; hoc eſt Conus ex EBD ad Conum ex MBC, ſicut conus ex KHI ad conum ex NHO. Componuntur enim ex eiſdem rationibus. Producantur iam axes eorum, & fiant AP æqualis AC, & GQ æqualis GO.

Et quoniam demonſtratum eſt quod ſicut PD ad DA, ita ſit portio ſphæroidis EBF ad conum eius EBF; & ſicut QI ad IG, ita portio ſphæræ KHL ad conum ſuum KHL: ſunt autem eædem rationes PD ad DA, & QI ad IG; Eadem igitur eſt ratio Portionis Sphæroidis EBF ad conum ſuum EBF; quæ portionis ſphæræ KHL ad portionem ſuam KHL:

Arch. de Conoid. & Sphæroid. pro. 19. Coroll. 7. huius.

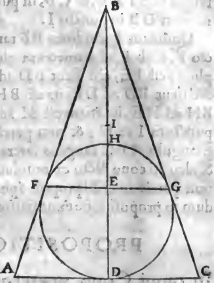
In eâdem verò ratione eſt conus E B F ad conum ex reuolutione trianguli M B C, hoc eſt dimidium Hemiſphæroidis, quâ conus K H L ad conum ex N H O, ſcilicet dimidium Hemiſphærij; & ad quadrupla poſteriorum Portio Sphæroidis E B F erit ad totum Sphæroides, ſicut Portio Sphæræ K H L ad totam ſphæram: Quare ſi axes Sphæræ & Sphæroidis ſecti fuerint in eâdem ratione, erunt & portiones earum diſſectæ in eâdem ratione, quod demonſtrandum erat.

Notandum eſt, quòd non differat ratio demonſtrationis in ſphæroidibus, quæ fiunt ex reuolutione Ellipſis circa minorem diametrum, nec cuiuslibet Sphæroidis ſecti ſecundum quamcunque diametrum, planis; quæ non ſunt ad diametros recta, ſed ſecundum ordinatim applicatas rectas ad eaſdem diametros. Eſt etiam & alia ſpecies Sphæroidum, quæ ſolum propria eſt Conis Scalenis; in his enim inſcribuntur, & ſphæroidia Scalena vocari poſſunt, ſi tamen inter ſphæroidia numeranda ſint; Non enim ex reuolutione ellipſis vel cuiuſuis alius curuæ generantur, ſed potius Sphæroidia torta videntur eſſe, queadmodum etiam & Coni Scaleni, Coni torti, nominari poterunt. Eandem vero rationem habent ad Conos ſuos circumſcribentes, & inſcriptos, quam reliqua ſolida ex reuolutione curuarum circa manentes axes genita, ad Conos ſuos proprios. Sed de his nihil amplius iam dicendum duxi.

PRO-

PROPOSITIO LV.

In Cono proprio circumſcribente ſphæram non poteſt proprie inſcribi Sphæroides.



Fiat Conus Proprius circũſcribens Sphæram, qui ſectus Plano per axẽ exhibeat triãgulum ABC, & axem eius BD diuidentem baſim AC in æqualia in puncto D. Diuidatur iam axis DB in puncto E, vt ſit DE tertia pars ipſius DB, & per E punctũ tranſeat linea FG parallela baſi AC diuidẽs etiam latera BA, & BC, in F, & G, vt ſit AF, vel CG tertia pars AB, vel CB. Quoniam igitur per conſtructionem Conus erat Proprius inſcribens Sphæram, erit in triangulo per axem latus BA, vel BC, triplum AD vel DC; & ideo circulus inſcriptus triangulo ABC tangens baſim AC in D, tanget etiam latera AB & CB in punctis F & G; ſunt enim tangentes ductæ a puncti A,

vel C, omnes æquales, quoniam AD, æqualis eſt DC. Inſcribatur igitur circulus FHGD in triangulo ABC; & quoniam recta BF tangit Circulum FHGD in F, & ab F ordinatim applicata eſt linea FE ad diametrum; erit ſicut BD ad DE, ita BH ad HE.

Per conuerſionem Prop. 43. huius.

Supponatur iam quod poſſit etiam Ellipſis tranſire per puncta FDG & inſcribi in triangulo ABC, vt tangat latera AB, & CB, in punctis F, & G, & ſecare axem DB in puncto I.

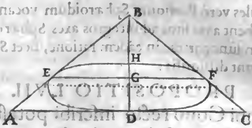
Quoniam igitur linea BF tangit Ellipſim in puncto F, & ab F ad diametrum eius ID ordinatim applicata eſt FE, erit ſicut BD ad DE, ita BI ad IE. Sed ſicut BD ad DE, ita eſt BH ad HE, quare ſicut BH ad HE, ita etiam eſt BI ad IE. Quare idem eſt punctum I & H; & non poteſt inſcribi Ellipſis in triangulo ABC tangens latera eius in F, D, & G; & ideo in cono facto ex reuolutione trianguli ADB non poteſt inſcribi propriè Sphæroides, quemadmodum in propoſitione enuntiatum erat.

PROPOSITIO LVI.

In omni Cono præterquam Proprio inſcribendæ Sphæræ, inſcribi poteſt Sphæroides.

SIt datus Conus ABC, qui non ſit Proprius inſcribendæ Sphæræ, & diuidatur plano ad baſim AC parallelo per punctum G in axe, vt ſit GD tertia pars totius BD, ſecante etiam latera Coni ABC in E &

F, in



F, in eadem ratione, quã ſecatur Axis BD. Concipiatur Conus ſecari plano per axem BD, & in eo ſumatur punctum H, ita vt ſit ſicut BD ad DG, ita BH ad HG. Dato igitur axe HD, & lineã EG ordinatim applicatã, deſcribatur circa eundem axem Elipſis per puncta E & F; quomodo autem hoc faciendum ſit docetur a Mydorgio libro ſecundo Conicorum Prop. 6. & cuicunque licet modicè verſato in Conicis manifeſtum eſt.

Quoniã igitur à puncto E in ſectione ordinatim applicata eſt linea EG ad diametrum HD, & in axe HD producto eſt punctum quoddam B, a quo eſt eadem ratio BD ad DG quæ BH ad HG; Si igitur ab eodem puncto B ducta fuerit ad punctum E in ſectione linea BE, ipſa tanget ſectionem in eodem puncto E, & reuolutis omnibus circa axẽ BD, facta erunt Conus ABC, & in eo inſcriptum Sphæroides ſicut oportebat. 34. lib. 1. Apollonij.

DEFINITIONES.

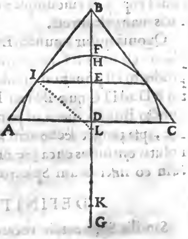
Similia Sphæroidia vocantur illa quorum diametri coniugatæ genetricum figurarum ſunt in eâdem ratione, & quæ facta ſunt ex reuolutione figuræ geni-

tricis circa ſimilem axem.

Similes verò Portiones Sphæroidum vocamus eas, quæ habent axes ſuos ad integros axes Sphæroidum, quorum ſunt partes, in eâdem ratione, licet Sphæroidia fuerint diſſimilia.

PROPOSITIO LVII.

In omni Cono recto inſcribi poteſt quælibet Portio Sphæroidis alicuius, præterquam portio illa, cuius axis eſt ad axem integrum Sphæroidis, ſicut axis Portionis propriæ Sphæræ in eodem Cono inſcriptibilis, ad axem Sphæræ cuius pars illa eſt.



SIt Triangulum ABC ſectio Coni recti per axem, & ipſe axis BD ſectus in E, & F, in tres partes æquales; & per E, ducta ſit recta IE baſi AC parallela; & in BD quantum opus eſt productâ, ſumatur vtcunque punctum G: Manifeſtum eſt quòd BG maior erit quã GE; quare maior erit proportio BG ad GE, quam BF ad FE; & ideo in lineâ FE erit aliquod punctum, vtpote H, ad quod erit

BH ad HE ſicut BG ad GE. Iterum manifeſtum eſt poſſe conſtitui Sphæroides tale, vt minus ſegmentum axis ſit HD, & reliquum ſegmentum DG, in quacunque ratione datâ ad illud; & quòd foret BH, ad HE, ſicut BG ad GE. Hoc igitur ſuppoſito, manifeſtum eſt quòd portio illius Sphæroidis erit Propria inſcripta in Cono ABC, & quod tanget illum in plano per IE ducto. Vnde manifeſtè apparet quòd quælibet portio alicuius Sphæroidis poterit inſcribi in eodem Cono ABC, quod primò probandum erat, præter vnam, quod ſic etiam probabimus. Si enim fuerit BH, ad HE, ſicut BK, ad KE, & diuiſâ HK bifariam in L, & ducta LI fuerit perpendicularis ad latus AB; tunc figura inſcripta erit Portio circuli, & ex reuolutione omnium circa axem BD, facta erit Portio Sphæræ propriè inſcripta in Cono ABC; & in illâ ratione axis HD, ad axem HK non poteſt alia figura inſcribi propriè in Cono ABC, quod etiam erat probandum.

Hic notandum quod Portionum Sphæroidum quæ propriè inſcribẽdæ ſunt in Cono aliquo, in quo etiam aliqua ſphæræ Portio propria inſcribenda ſit, ſingulæ minores portiones ſunt Sphæroidum oblongorum, & ſingulæ maiores ſunt Sphæroidum latorum portiones: In figurâ enim præcedente, ſi inſcribenda fuerit Portio Minor Sphæroidis quam eſt Portio Sphæræ propria in codẽ Cono inſcripta, axis eius habebit minorem rationem ad axem totius Sphæroidis, quàm habeat HD ad axem totum Sphæræ HK; quare maior erit diameter Sphæroidis quàm ſit HK diameter Sphæræ. Ponatur

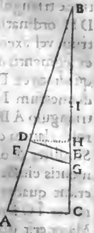
igitur punctum G pro termino diametri vel axis alicuius Sphæroidis, cuius portio ſupra planum A C conſtituta inſcribenda ſit propriè in Cono ABC; & quoniam neceſſarium eſt vt tangat Conum in I, erit alter terminus axis inter F, & H; & ideo multò maior erit axis ſphæroidis, quàm axis Sphæræ H K. Sed quadrata ordinatim applicatarũ in Sphærâ ſunt æqualia rectangulis ex ſegmentis diametri factis; ſcilicet quadratum IE æquale eſt rectangulo HEK: in Sphæroide vero quadratum IE minus eſt rectangulo ex ſegmentis diametri facto; conſequenter reliqua omnia ordinatim applicatarum quadrata minora erunt, quam ſint rectangula ex ſegmentis diametri vel axis Sphæroidis facta. Quare ordinatim applicata ad centrum Sphæroidis minor erit, quàm dimidiũ axis; & ideo ſphæroides oblongum erit, cuius Portio Minor, quàm Portio propria Sphæræ in Cono A BC inſcripta, inſcribenda eſt. Simili modo demonſtrari poteſt omnes Portiones propriè inſcribendas, quæ maiores ſunt Portione propriâ Sphæræ inſcriptâ, eſſe Portiones alicuius Sphæroidis lati; minora enim ſunt rectangula ex ſegmentis axis, quàm ſint quadrata ordinatim applicatarum ad axem.

Ex demonſtratis etiam colligi poteſt, quòd omnis portio minor Sphæroidis propriè in Cono inſcripta maior ſit Portione Sphæræ propriâ eiuſdem Coni: Maiores vero Portiones minores ſint.

Quod autem ſit aliquis Conus rectus, in quo nulla poteſt portio ſphæræ propriè inſcribi, manifeſtum eſt, Nam omnes Coni, quorum latus maius trianguli per axem maius eſt quàm triplum baſis, (quemadmodum

in trian-

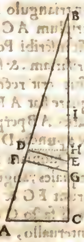
in triangulo A B C, in quo ſit latus A B maius quàm triplum A C) hoc habent proprium, vt eis nulla poſſit inſcribi Portio ſphæræ Propria. Diuiſa enim A B trifariam, & factâ A D tertiâ parte ipſius, erit recta A D, maior baſe A C: quare fiat A F æqualis A C, & ab F, ad latus A B perpendicularis erigatur F G, & a puncto D, linea D E parallela F G:



Quoniam igitur A F, & A C ſunt æquales; anguli etiam F, & C, recti, erunt F G & G C etiam æquales; quare ſi facto G centro, & G F, vel G C interuallo, deſcribatur circulus, tanget lineas A F & A C, in punctis F & C; non tanget vero lineam AB in puncto D, quare ex reuolutione trianguli & circuli circa axem B C & centrum G, facta ſphæra non erit propriè inſcripta in Cono ex reuolutione trianguli A B C facto. Sed ſphæra facta ex reuolutione circuli ex radio E D circa eundem axem B C, tanget latus Coni propriè in puncto D; ſed idcirco non tanget baſim Coni in C puncto, ſicut oportuit; maior enim eſt E C linea, quam E D radius Sphæræ. Non poteſt igitur inſcribi propriè ſphæra multo minus Portio Sphæræ. Oportet enim quòd punctum E ſit centrum cuiuſcunque Sphæræ vel portionis ſphæræ, quæ continget latus A B in D.

Nota etiam, quòd in huiuſmodi Conis Sphæroidia vel portiones Sphæroidum propriè inſcribendæ, ſint omnes oblongæ; ductâ enim D H ad axem B C per-

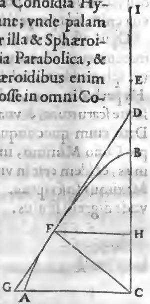
pendiculari, & facto ſicut BC ad CH ita BI ad IH, erit IC axis Sphæroidis, propriè inſcribēdi in Cono ex reuolutione trianguli ABC facto; & erit recta DH ordinatim applicata ad diametrum vel axem IC. Sed rectangulum ex ſegmentis diametri CHI, maius eſt quadrato ex DH, (circulus enim circa diametrum IC non inſcribi poteſt in triangulo ABC, multo minus Sphæroides latum cuius minor diameter IC.) Similiter & omnia rectangula ex ſegmentis eiuſdem diametri IC, maiora erunt quadratis ordinatim applicatarum; quare diameter IC ſemiellipſis in triangulo ABC inſcripti Maior erit diameter ipſius ſemiellipſis; & ideo quod factum erit ſphæroides, ex reuolutione eiuſdem ſemiellipſis, erit oblongum, ſicut diximus. Manifeſtum eſt etiam, quòd omnes portiones quæ in huiuſmodi Conis propriè inſcribi poſſint, ſint etiam Portiones ſphæroidum oblongorum, cuius demoſtrationem quoniam facillimam, breuitatis cauſa omitto. Sphæroidia verò lata & eorum Portiones in nullis Conis inſcribenda ſunt, præterquam in quibus etiam portiones ſphærarũ propriè inſcribi poſſunt; medium enim locum tenet ſphæra vel ſphæræ portio, inter ſphæroidia oblonga, & lata, & eorum portiones; quod cuiuis intuenti ſatis manifeſtè apparebit.



Conoidis Parabolici Inſcriptio adeo facilis eſt, vt nihil de illo dicendum putem, ſed ſolum vt reuideas Pro

poſitionem 50. de Circumſcriptione eiuſdem Cono minimo, vnde inuentio diametri eius clare apparebit quâ inuentâ vnà cum puncto contactus in latere trianguli per axem, à quo ordinatim applicata ad diametrum etiam data eſt; quâ cognitâ, latus rectum & tota ſectio manifeſta erit. Manifeſtum eſt etiam quod ſicut in inſcribendis portionibus Sphærarum, vna ſola portio poſſit in eodem Cono propriè inſcribi, ita etiam de Conoidibus Parabolicis dicendum ſit, nulla enim alia portio præterquam vna ſola poteſt propriè inſcribi in eodem Cono.

In omni verò Cono, infinita Conoidia Hyperbolica propriè inſcribi poſſunt; vnde palam fit analogiam eſſe quâdam inter illa & Sphæroidia; ſicut etiam inter Conoidia Parabolica, & Sphærarum portiones; De Sphæroidibus enim iam demonſtrauimus infinita poſſe in omni Cono propriè inſcribi.



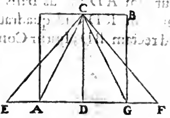
Nunc autem repetamus figuram Propoſitionis 51. In triangulo G D C diuiſo parallelâ F H baſi G C, ſupponatur axis C D produci in infinitum, & in producto ſumi vtcunque punctum I; ſecundum vero diſtantiam quam habebit I a puncto D, cadet etiam punctum B, (quod vertex eſt ſectionis) vel propiùs vel longiùs ab eodem puncto D; oportet enim quod eadem ſit ratio I D ad D B,

& IH ad HB; quare ſi I punctum foret propius, etiam & B accedet propius, & ſi I longius, tunc & B diſtabit etiam plus; vtcunque vero fuerint, ſemper tamen Hyperbolica ſectio continget latus DG triãguli DGC in puncto F; vnde ex reuolutione trianguli GDC, vnà cum curuâ hiperbolicâ AB circa axem DC, facta erunt Conus, & in eo inſcriptum propriè Conoides Hyperbolicum: Maximum autem non poteſt dari, quoniam ſemper poteſt dari maius: ſic etiam de ſphæroidibus manifeſtum eſt quod portiones eorum ſemper augeri poſſint: Portionum vero Conoidum Parabolicorum, & ſphærarum non poteſt dari aut maior aut minor, vna enim ſola propriè inſcribitur non plures.

Opus eſt iam vt aliquid dicamus de inſcriptione maximorum Conorum in portionibus ſphærarum, vel ſphæroidum, vel Conoidum Parabolicorum, vel Hyperbolicorum, ſed omnes hi riuuli quaſi ex vno fonte ſcaturiunt, & vna ſola regola pro omnibus ſeruit: Dato enim quocunque ex iſtis ſolido, & circumſcripto Cono Minimo, in illo inſcribatur Conus Maximus, & idem erit in vnoquoque iſtorum ſolidorum, Maximus Inſcriptus. Sed redeamus iam in ſemitam, vnde digreſſi ſumus.

LEMMA.

Sit Cylindrus AB cuius axis CD, & circa eundem axem conſtituatur Conus ECF ei æqualis. Dico baſim Coni EF eſſe triplam baſis AG Cylindri AB. Ductis enim lineis AC & GC ſupponatur Conus ACG ſuper eâdem baſi & eiuſdem altitudinis conſtitutus; quare Cylindrus AB erit triplus Coni ACG. Igitur Conus ECF æqualis Cylindro AB, erit etiam eiuſdem Coni ACG triplus: Coni verò eiuſdem altitudines ſunt inter ſe ſicut baſes. Quare baſis EF coni ECF eſt tripla baſis AG coni ACG, vel Cylindri AB quod erat demonſtrandum.



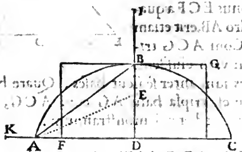
PROPOSITIO LVIII.

In omni Portione Sphæræ, quadratum radij baſis vnà cum tertiâ parte quadrati axis, ſimul æqualia ſunt duplo quadrato radij baſis Cylindri æqualis Portioni & eiuſdem altitudinis.

Sit Portio quæcunque Sphæræ ABC, cuius axis BD, circa quem, & eiuſdem altitudinis, conſtituatur

Cylindrus æqualis portioni ABC. Dico quadratum AD vnà cum tertiâ parte quadrati BD ſimul duplum eſſe quadrati radij baſis Cylindri æqualis Portioni. Diuidatur enim BD axis portionis in E, vt ſit quadratum ex DE æquale tertiæ parti quadrati BD; & in producto axe DB ſit I punctum altitudo Coni ſuper baſi portionis conſtituti & ei æqualis. Producatur iam AD radius baſis portionis in K, vt ſit quadratum KD, ad quadratum AD, ſicut recta ID, ad rectam BD; Igitur Conus cuius baſis radius KD,

14. huius.



& altitudo BD, æqualis eſt Cono ex baſi portionis AC, & altitudine DI, (hoc eſt portioni ipſi), reciprocantur enim baſes & altitudines; Quare etiam æqualis erit Cylindro FG, qui ſupponitur fieri æqualis portioni ABC; & igitur quadratum KD erit triplum quadrati DF radij baſis Cylindri FG.

Per præcedens Lemma.

Cum ergo ſit ſicut duplum quadrati AD ad quadratum AB, hoc eſt ad quadrata AD & DB, ita DB linea ad lineam BI, erit componendo & per conuerſionem rationis ſicut duplum quadrati AD vnà cum

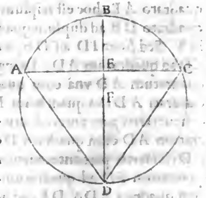
qua-

quadrato A B, hoc eſt triplum quadratum A D cum quadrato D B ad duplum quadratum A D, ita I D ad D B. Sed ſicut I D ad D B, ita factum eſt quadratum KD ad quadratum A D. Ex æquo igitur ſicut triplum quadratum A D vnà cum quadrato B D ad duplum quadrati A D; ita quadratum K D ad quadratum AD & ſicut tertia pars antecedentis priorum ſcilicet quadratum A D cum quadrato D E ad duplum quadrati A D; ita tertia pars antecedentis poſteriorum, ſcilicet quadratum F D ad quadratum A D; & permutando ſicut quadrata A D & D E, ad quadratum F D, ita duo quadrata A D ad quadratum A D. Quadratum igitur A D cum quadrato D E ſimul; hoc eſt quadratum radij baſis Portionis A B C vnà cum tertiâ parte quadrati axis eius B D, duplum eſt quadrati F D radij baſis Cylindri F G, æqualis portioni & eiuſdem altitudinis, quod demonſtrandum erat.

LEMMA.

Conus rectus in Sphærâ inſcriptus eſt ad Sphæram, ſicut ſolidum ex quadrato axis eiuſdem Coni in reliquum diametri Sphæræ, ad dimidium Cubi totius diametri eiuſdem Sphæræ.

Esto Sphæra A B C D cuius centrum F, in quâ inſcriptus ſit Conus rectus A D C circa axem E D partem diametri Sphæræ, cuius reliqua pars ſit B E.



Dico Conum ADC eſſe ad Sſphæram ABCD, ſicut ſolidum ex quadrato DE in EB ad dimidium Cubi ex diametro Sphæræ BD.

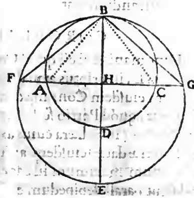
Quoniam enim Coni habent ad inuicem rationem compoſitam ex baſibus & altitudinibus ipſorum; Conus verò ADC, cuius baſis ex radio AE, & altitudo ED, ad Conum cuius baſis eſt ex radio BD, & altitudo DF, ſe habet ſicut ſolidum parallelepipedum ex rectangulo DEB in DE, hoc eſt ex quadrato DE in EB, ad ſolidum ex quadrato DB in DF, hoc eſt dimidium Cubi ex diametro BD; Conus verò ex radio baſis DB, & altitudine DF æqualis eſt Sphæræ ABCD. Quare conus ADC inſcriptus Sphærâ ABCD, eſt ad Sphæram ABCD ſicut ſolidum ex quadrato ED axis coni in EB reliquum axis Sphæræ, ad dimidium Cubi BD totius diametri ſphæræ, quod erat propoſitum.

Conus ex radio DB & altitudine DF æqualis eſt Sphæræ. Arch. li. 1. de Sph. & Cylindro.

PROPOSITIO LIX.

Si diameter Sphæræ producta fuerit, ita vt pars producta æqualis fuerit dimidiæ ipſius, & circa totam deſcribatur Sphæra, & ſi ambo ſecentur vtcunque plano

ad diametrum recto, & ſuper circulo in maiore Sphærâ per interſectionem plani facto, conſtituatur Conus habens verticem in contactu Sphærarum: Ille Conus erit æqualis Portioni Minoris Sphæræ ab eodem plano diſſectæ, & circa eundem axem conſtitutæ.



SIt enim Sphęra AB. CD, cuius diameter BD producatur in E, vt ſit DE æqualis dimidiæ DB, & circa totam BE, deſcribatur alia Sphæra FBGE, tangens Sphæram ABCD in B puncto. Secentur iam ambo vtcunque plano ad diametrum recto, faciente in Sphærâ FBGE circulum circa diametrum FG, & in Sphærâ ABCD diſſecante Portionem ABC, & ſuper circulo in Sphærâ maiori pro baſi, inſcribatur Conus FBG, habens verticem in contactu Sphærarum B. Dico Conum FBG æqualem eſſe Portioni Minoris Sphæræ conſtitutæ circa eundem axem BH, ſcilicet Portioni ABC. Inſcribatur enim in portione ABC, conus ABC: &

Quoniam Conus æqualis Portioni ABC, habens

eandem baſim, eſt ad Conum ABC, ſicut compoſita ex HD & dimidiâ BD, hoc eſt HE, ad ipſam HD; erit portio ABC ad Conum ſuum ABC, ſicut HE ad HD. Conus verò FBG eſt ad Conum ABC (cùm ſint eiuſdem altitudinis) ſicut quadratum FH ad quadratum AH, hoc eſt ſicut rectangulum EHB ad rectangulum DHB, vel ſicut EH ad HD. Quare cùm Portio ABC habeat ad Conum ſuum ABC eandem rationem quam habet Conus FBG ad eundem Conum ABC, erit Conus ABG æqualis Portioni ABC quod demonſtrandum erat.

Arch. lib. 2, prop. 2.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtũ eſt quòd Conus maximus in Sphærâ FBGE, inſcriptus æqualis erit Sphæræ ABCD circa axem eiuſdem Coni maximi deſcriptæ; vnde etiam ſequitur, quòd Portio ſe habet ad Sphæram ſuam, ſicut Conus (in Sphæra cuius axis eſt ſeſquialter diametri Sphæræ datæ) eiuſdem altitudinis cum portione, ad Conum maximum in eâdem ſphærâ inſcriptum, vel ſicut parallelepipedum ex ſegmentis lineę ſeſquialteræ diametro Sphæræ, cuius baſis latus ſit æquale altitudini eiuſdem Portionis, ad quatuor vigeſimas ſeptimas Cubi eiuſdem rectæ. Cùm enim in præcedente figurâ, Conus FBG ſit ad ſphæram FBGE, ſicut ſolidum ex quadrato BH in HE, ad dimidium Cubi ex diametro BE; Cubus verò ex diametro BE, ſit ad Cubum ex diametro BD, ſicut 27. ad 8. quare Conus FBG eſt ad ſphæram ABCD, ſicut ſolidum ex quadrato BH in HE ad dimidium Cubi ex lineâ BD,

Lemma præcedẽs.

hoc eſt 4. Atqui Portio ABC æqualis eſt Cono FBG, ideoque ſe habet ad Sphæram ABCD, ſicut ſolidum ex quadrato BH in HE, ad 4. quorum Cubus ex totâ BE eſt 27.

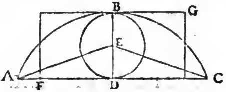
PROPOSITIO LX.

Omnis Portio Sphæræ æqualis eſt tribus Conis ex eâdem baſi & dimidiâ altitudine eiuſdem Portionis, vnà cum ſphærâ, cuius diameter eſt ipſe axis Portionis.



Sit Portio quæcunque Sphæræ ABC, cuius axis BD diuiſus ſit in E bifariam, & circa diametrum vel axem BD concipiatur ſphæra, & ductis AE, EC, ſuper baſi Portionis AC ſit Conus AEC, cuius altitudo ſit DE dimidium axis: Dico tres Conos AEC, vnà cum ſphærâ circa axem BD ſimul æquales eſſe Portioni ABC: Conſtituatur enim circa axem BD, Cylindrus FG, æqualis portioni ABC.

Et quoniam quadratum AD radij baſis Portionis vnà cum tertiâ parte quadrati axis portionis BD, ſimul dupla ſunt quadrati FD radij baſis Cylindri FG

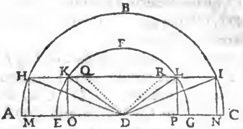


æqualis portioni & eiuſdem altitudinis, erunt tria quadrata A D, vnà cum quadrato axis B D, ſexcupla quadrati F B, & ideo tres Coni ex baſi A C & altitudine B D, vnà cum cono ex radio baſi B D & eàdem altitudine B D, ſimul æquales ſunt duplo Cylindro F G, hoc eſt duplæ portioni A B C; Sed Conus ex radio baſi B D & altitudine B D eſt duplus Sphæræ; quare tres Coni ex baſi A C & altitudine D E, vnà cum Cono ex radio baſi B D, & altitudine eâdem D E, hoc eſt Sphærâ circa axem B D, ſimul æquales ſunt Portioni A B C, quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO LXI.

Si duo Hemiſphæria inæqualia conſtituta fuerint ſuper eâdem baſi & circa idem centrum & ſecta fuerint ambo eodem plano ad baſim parallelo, & in vtroque inſcriptus fuerit Cylindrus inter eadem plana parallela; partes ſegmentorum excluſæ extra Cylindros inter ſe æquales erunt.

Digitized by Google



ESto Hemiſphærium ABC, cuius centrum D, baſis AC, & circa idem centrum & ſuper eâdem baſi, ſcilicet eodem plano conſtituatur aliud Hemiſphærium minus EFG, & ſecentur ambo plano HI baſi AC parallelo, & in vtroque ipſorum ſegmento inſcribantur Cylindri, in maiore ſcilicet Cylindrus HINM, in minori vero Cylindrus KLPO; Dico partes excluſas ſegmentorum extra Cylindros eſſe inter ſe æquales, videlicet partem notatam literis AHM, NIC ſegmenti maioris, æqualem eſſe parti EKO, PLG, minoris ſegmenti: Fiat enim conus rectangulus QDR inter eadem plana parallela; & ſit HDI conus ſegmenti maioris, & KDL ſegmenti minoris.

Quoniam igitur Conus rectangulus QDR vnà cum Cono ſegmenti HDI ſunt æquales dimidio Sectoris ſecundi AHDIC, & idem Conus rectangulus QDR cum Cono ſegmenti KDL ſimul æquales ſunt dimidio ſectoris ſecundi EKDLG; erunt Conns ſegmenti HDI & conus rectangulus QDR bis ſumpti æquales toti Sectori ſecundo AHDIC; Sumpto igitur communi Cono HDI, erunt tres Coni HDI cum duo- 10. huius.

bus

bus Conis rectangulis QDR ſimul æquales ſegmento AHIC, quare deducto Cylindro HN, vel tribus Conis HDI, reliqua pars ſegmenti æqualis erit duobus Conis rectangulis QDR.

Simili artificio demonſtrabitur quòd in ſegmento minori EKLG, pars excluſa extra Cylindrum KP, hoc eſt, quæ notatur literis EKOPLG, ſit æqualis etiam duplo eiuſdem Coni rectanguli QDR, & ideo partes illæ excluſæ, cum ſint æquales eidem tertio, ſcilicet duplo Cono rectangulo QDR, ſunt inter ſe æquales quod erat propoſitum demonſtrare.

COROLLARIVM.

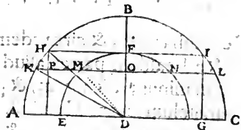
Hinc elicitur quòd exceſſus iſti ſegmentorum ſupra Cylindros in ipſis inſcriptos, ſint ſemper dupli exceſſuum Cylindri ſuper baſi Hemiſphærij conſtituti ſupra ſegmentum inter eadem plana intercepti. Demonſtratum eſt enim quòd exceſſus Cylindri ſupra Hemiſphærium vel quamlibet partem eiuſdem vtcunque inter baſim, & planum baſi parallelum interceptam ſit ſemper æqualis Cono rectangulo eiuſdem altitudinis; Iam vero demonſtratum eſt quod iſti exceſſus ſegmentorum ſupra Cylindros ſint dupli ipſorum Conorum rectangulorum; Dupli igitur ſunt exceſſuum Cylindri ſupra ſegmenta hemiſphæriorum inter eadem plana intercepti, & ſupra eandem baſim Hemiſphærij conſtituti.

PROPOSITIO LXII.

Si ſit Hemiſphærium, & circa idem Centrum & ad eaſdem partes aliud hemiſphærium minus; Sit autem, & planum baſi parallelum ſecans Hemiſphærium maius, tangens vero minus, & in Hemiſphærio maiori inſcriptus Cylindrus inter parallelum & baſim; Hemiſphærium minus æquale erit exceſſui ſegmenti maioris ſupra Cylindrum, & ſingulæ partes Hemiſphęrij minoris ſingulis partibus exceſſus prædicti correſpondentes æquales erunt.

SIt enim Hemiſphærium A B C, cuius centrum D, axis B D, & circa idem centrum, & ad eaſdem partes ſit Hemiſphærium minus E F G, quod tangat planum baſi parallelum H I in F, ſecet verò Hemiſphærium A B C in H & I; & inter planum H I & baſim A C inſcribatur Cylindrus H G: Dico Hemiſphærium minus E F G æquale eſſe exceſſui ſegmenti AHIC ſupra Cylindrum inſcriptum H G, & ſingulas partes hemiſphærij E F G, ſingulis partibus exceſsûs ſegmenti ſupra Cylindrum H G, viciſſim ſumptis æquales eſſe: Ducatur enim vtcunque planum K L ſecans

Hemiſ-



Hemiſphærium maius in K & L, minus in M & N, Cylindrum HS in P, & axem communem BD in puncto O; & concipiantur omnia ſecta plano per axem, in quo ſint ductæ a punctis M, H & K, ad centrum D, rectæ MD, HD, & KD.

Quoniam igitur quadratum MD æquale eſt quadratis MO & OD; quadratum autem HD æquale eſt quadrato FD, hoc eſt quadratis MO, OD, vnà cum quadrato HF, vel PO: Quadratum vero KD (æquale quadrato HD) æquale eſt quadratis KO & OD: quare dempto quadrato OD, quadratum KO æquale erit quadrato PO, & MO: Quadratum igitur MO eſt æquali exceſſui, quo quadratum KO ſuperat quadratum ex PO: Circulus igitur factus ex radio KO æqualis eſt duobus circulis ex radijs PO & MO, quare ſi ex circulo facto ex radio KO ſubtrahatur circulus ex radio PO, reliquum ex parte KP æquale erit circulo ex radio MO. Idem demonſtrabitur per totum ſpatium, vbicunque ſecta fuerint Hemiſphæria & Cylindrus plano ad baſim AC parallelo; &

idco

ideo Hemiſphærium minus E F G æquale eſt parti ſolidæ annulari Hemiſphærij A B C, vel ſegmenti A H I C, extra Cylindrum H S, & quælibet pars Hemiſphærij E F G, cuilibet parti exceſsûs ſegmenti ſupra Cylindrum H S, intercepti inter eadem plana parallela æqualis erit; ſcilicet portio M F N æqualis erit parti exceſsûs denotatæ literis K H P Q I L, & ſegmentum E M N G, æquale erit parti A K P R S Q L C, quod demonſtrandum erat.

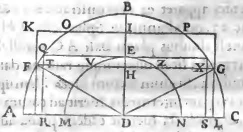
COROLLARIVM.

Euidenter apparet ex demonſtratis hîc, & ex propoſitione 27. quòd annulus Sphæricus A H R, I C S ſecari poteſt duobus planis baſi A C parallelis, ita vt pars intermedia ſit in quâcunque ratione datâ ad totum annulum. Si enim ſectum fuerit Hemiſphærium E F G, ita vt pars intermedia fuerit ad totum in ratione datâ, & producta fuerint eadem plana ad interſectionem Hemiſphærij A B C, manifeſtum eſt annulum ſphæricum ita etiam ſecari in eâdem ratione; partes enim interceptæ inter eadem plana ſunt inter ſe æquales.

PROPOSITIO LXIII.

Si ſegmentum quodcunque Hemiſphærij ſectum fuerit plano ad baſim parallelo, ita vt quadratum totius axis ſegmen-

ti ſit triplum quadrati partis interceptæ inter planum parallelum & baſim, & conſtitutus fuerit circa eundem axem ſegmenti, Cylindrus eiuſdem altitudinis, habens baſim æqualem circulo per interſectionem plani paralleli in ſegmento facto; Cylindrus ille æqualis erit ſegmento Hemiſphærij.

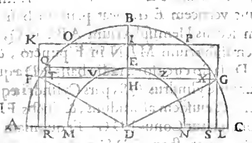


SIt enim Hemiſphærium ABC, & quodcunque ſegmentum eius AOPC, cuius axis ID ſectus ſit in H, vt quadratum ID ſit triplum quadrati DH, & per H tranſeat planum FG baſi AC parallelum, & in baſi AC fiat circulus circa centrum D æqualis circulo FG in ſegmento a ſectione facto, ſuper quo pro baſi conſtruatur Cylindrus KL, eiuſdem altitudinis ID cum ſegmento AOPC. Dico Cylindrum KL æqualem eſſe ſegmento AOPC. Secetur enim axis BD in E, vt ſit quadratum BD triplum quadra-

ti E D; & circa axem E D ſit Hemiſphærium M E N per cuius verticem E tranſeat planum baſi A C parallelum ſecans Hemiſphærium A B C in Q, tangens vero Hemiſphærium M E N in E puncto, & circa axem E D (facto circulo ex radio baſis R D æquali Q E) conſtituatur Cylindrus Q S, pars Cylindri æqualis hemiſphærio & eiuſdem altitudinis; & ductis F D & G D lineis concipiatur Conus F D G: Et quoniam axis ſegmenti I D minor eſt axe B D Hemiſphærij A B C, planum F G ſecabit hemiſphærium M E N & Cylindrum Q S: Signentur igitur interſectio Cylindri Q S literâ T, & interſectio plani cum hemiſphærio V.

Et quoniam Cylindrus T S eſt pars Cylindri æqualis Hemiſphærio & eiuſdem altitudinis; erit æqualis ſectori ſecundo A F D G C eiuſdem altitudinis H D. Sed ſector ſecundus A F D G C vnà cum Cono FDG conficiunt ſegmentum A F G C; Cylindrus vero T S vnà cum exceſſu notato literis A F T R, S X G C, conſtituunt idem ſegmentum A F G C. Exceſſus verò ille per præcedentẽ demonſtratur æqualis ſegmento M V Z N minoris hemiſphærij M E N. Ex æquali igitur Conus F D G æqualis eſt ſegmento M V Z N, quod memoria retinendum eſt. Rurſus cum factum ſit ſicut I D ad H D, ita B D ad E D, erit permutando ſicut I D ad B D, ita H D ad E D; Quare ſegmentum A O P C cuius axis I D, eſt ad ſuum hemiſphærium cuius axis B D, ſicut portio M V Z N cuius axis HD, ad ſuum Hemiſphærium M E N cuius axis E D; Similia igitur ſunt ſegmenta A O P C & M V Z N ideoque in triplâ ratione axium ſuorum, hoc eſt in triplâ ratio-

9. huius.



ne ID ad HD. Sed ſicut ID ad HD, ita eſt Cylindrus KL ad Cylindrum FL, & Cylindrus FL (cum ſit triplus Coni FDG) eſt ad conum FDG in duplâ ratione ID ad HD (nam quadratum ID eſt triplum quadrati HD) quare Cylindrus KL eſt ad Conum FDG in triplâ ratione ID ad HD, ſcilicet ſicut ſegmentum AOPC ad ſegmentum MVZN. Sed demonſtratum eſt quod ſegmento MVZN æqualis ſit Conus FDG. Aequalis igitur eſt Cylindrus KL ſegmento AOPC: quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

I. *Dato ſegmento Cylindrum æqualem conſtituere in eadé altitudine.*

Hinc elicitur, quòd quadratum radij baſis Cylindri æqualis ſegmento minus ſit quadrato radij baſis Hemiſphærij tertiâ parte quadrati axis eiuſdem ſegmenti. Quare facili negotio conſtituitur Cylindrus æqualis cuicunque ſegmento Hemiſphærij dato, in eâdem altitudine.

II. *Dato ſegment co-*

Apparet etiam quâ ratione conſtitui poſſit etiam Conus eiuſdem altitudinis æqualis cuicunque ſegmé-

to da-

to dato. Dato enim ſegmento M V Z N, fiat quadratum A D triplum quadrati M D, & ex quadrato A D ſubducto quadrato H D axis ſegmenti, reliqui quadrati latus erit radius baſis Coni æqualis ſegmẽto MVZN dato, & eiuſdem altitudinis.

num æqualem in eadem altitudine conſtituere.

Manifeſtum eſt etiam quòd omni Cylindro, cuius axis quadratum non ſit maius quàm duplum radij baſis eiuſdem Cylindri, conſtitui poſſit ſegmentum hemiſphærij æquale. Dato enim Cylindro K L, & diuiſo axe eius I D in H, vt ſit quadratum I D triplum quadrati H D, inuenietur F D æqualis radio baſis Hemiſphęrij, cuius ſegmentum eiuſdem altitudinis æquale eſt Cylindro K L dato.

III. Dato Cylindro ſegmentum æquale in eadem altitudine cõſtituere.

Cuicũque etiam Cono, cuius radij baſis quadratũ non ſit minus quàm duplum quadrati axis, conſtitui poteſt ſegmentum in eâdem altitudine æquale; quemadmodum dato cono F D G, cuius baſis radij F H quadratum maius eſt quàm duplum quadrati axis H D, datum eſt F D, & ideo M D, cuius quadratum ſubtriplum eſt quadrati F D. Si vero quadratum F H fuerit duplum quadrati D H; ſicut quadratum Q E eſt quadrati E D; tunc Conus ille erit maximus in Hemiſphęrio inſcriptibilis, & nulla portio hemiſphærij ei æqualis in eâdem altitudine conſtitui poteſt; Hemiſphærium enim ei æquale erit, ſicut ex iſtâ & præcedente propoſitione manifeſtè apparet.

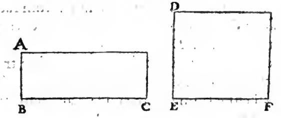
IV. Dato cono ſegmẽtum æquale eiuſdem altitudinis facere.

Ex præcedente etiam manifeſtum eſt quòd Hemiſphęrium æquale ſit ſolido annulari ſphærico eiuſdem altitudinis; & ideo datę ſphęrę conſtitui poteſt Annulus Sphęricus æqualis in quâcunque magnitudine datâ; cuius

V. Datæ ſphęræ annulũ ſphæricum æquale in quacũque magnitudine conſtituere.

tâ; cuius demonſtrationem, quoniam facilis, breuitatis causâ omitto.

LEMMA.

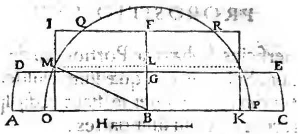


Sit Cylindrus datus A C & oporteat alium conſtituere æqualem in datâ altitudine D E: Fiat igitur ſicut D E ad A B altitudinem Cylindri dati, ita quadratum B C diametri baſis Cylindri A C ad quadratum E F; & facto circulo circa diametrum E F, conſtruatur Cylindrus D F. Quem dico æqualem eſſe Cylindro A C: Reciprocantur enim baſes & altitudines, ideo manifeſtum eſt.

PROPOSITIO LXIV.

Dato Hemiſphærij ſegmento, aliud æquale in datâ altitudine inuenire. Oportet autem quòd altitudo data non excedat radium Hemiſphærij æqualis dato ſegmento.

Sit ſeg-



SIt ſegmentum datum ADEC cui aliud ſegmentum æquale conſtituendum ſit in altitudine lineę H, quæ minor ſit radio Hemiſphærij, ſegmento dato æqualis. Sit igitur centrum baſis ſegmenti B, a quo erigatur perpendicularis BF æqualis lineę H datę, ſecans planum ſuperius ſegmenti in G, & circa axem GB ſegmenti concipiatur ei Cylindrus æqualis, cui etiam æqualis fiat alter Cylindrus IK in altitudine FB vel H. Diuiſâ iam FB in L, vt ſit quadratum totius triplum quadrati LB, tranſeat per L punctum planum baſi AC parallelum ſecans latus Cylindri IK in M, & ex ductâ MB pro radio, fiat Hemiſphærium circa centrum B, cuius ſegmentum OMQRP æquale erit Cylindro IK; & ideo etiam ſegmento dato ADEC, & in altitudine FB, vel H. quod faciendum erat.

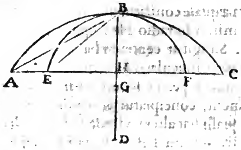
Per 63. & Corol. eiuſdem.

Per Lemma præcedens.

PRO-

PROPOSITIO LXV.

Superficies Sphæricæ Portionum diuerſarum Sphærarum, quæ ſunt eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe ſicut radij ſphærarum quarum ſunt partes.



SIt enim ABC portio Sphæræ, cuius centrum D, & radius BD, baſis planum AC, altitudo BH, & ſuper eodem plano & in eâdem altitudine conſiſtat alia portio Sphæræ EBF, cuius radius ſit BG; Dico ſuperficiem ſphæricam portionis ABC ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF ſe habere ſicut linea BD ad lineam BG. Ducantur enim lineæ AB & EB. Et quoniam circulus ex radio AB æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ portionis ABC; ſimiliter & circulus a radio EB æqualis eſt ſuperficiei ſphæricæ portionis EBF; erit ſicut quadratum AB ad quadratum EB, ita ſu-

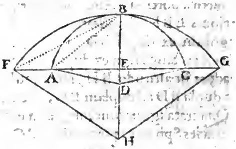
perficies

perficies ſphærica portionis ABC, ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF. Quadrato autem AB æquale eſt rectangulum ex duplâ BD in BH; & quadrato BE æquale eſt rectangulum ex duplo BG in BH; Quare, cùm eadem ſit altitudo BH, rectangula erunt inter ſe ſicut dupla BD ad duplam BG, hoc eſt ſicut BD ad BG. Quadrata igitur ſunt inter ſe in eâdem ratione; & ſuperficies Sphærica portionis ABC ad ſuperficiem ſphæricam portionis EBF, ſicut recta BD ad rectam BG, hoc eſt ſicut radius Sphæræ cuius eſt Portio ABC, ad radium ſphæræ cuius eſt Portio EBF; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Sectores diuerſorum Hemiſphæriorum, quorum Portiones ſunt eiuſdem altitudinis, ſunt ad inuicem in duplicatâ ratione radiorum Sphærarum, quarum ſunt partes.

SIt planum FG, ſuper quo erigatur perpendicularis BE producta vſque in H, & facto H centro, & interuallo BH deſcribatur portio Sphæræ FBG, inſiſtens plano FG; ſumptoque vtcunque puncto D in axe BH (modò non ſit ſupra dimidium BE propiùs B quàm E) deſcribatur iterum circa illud alia portio Sphæræ ABC eiuſdem altitudinis & eidem inſiſtens plano FG; ductiſque iam rectis FH, GH, &



AD, CD, intelligantur facti Sectores FBGH, & ABCD. Dico ſectores iſtos FBGH, & ABCD, inter ſe eſſe in duplicatâ ratione axium ſuorum, hoc eſt in duplicatâ ratione BH ad BD. Ductis enim rectis FB & AB, ſupponantur Coni facti ex FB pro radio baſis & altitudine BH; ſimiliter ex AB radio baſis & altitudine BD, qui æquales erunt Sectoribus FBGH, & ABCD.

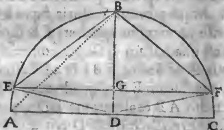
38. lib. 1. Arch. de Sph. & Cyl. Et quoniam ratio Conorum ad inuicem compoſita eſt ex baſibus & altitudinibus, erit & ratio ſectoris FBGH ad ſectorem ABCD compoſita ex iiſdem, ſcilicet ex quadrato FB pro baſi vnius ad quadratum AB pro baſi alterius, & rectâ BH altitudine ſectoris FBGH ad rectam BD altitudinem ſectoris ABCD. Sed in præcedente demõſtratum eſt quòd ſuperficies ſphærica portionis FBG, eſt ad ſuperficiem ſphæricam portionis ABC eiuſdem altitudinis ſicut HB radius Sphæræ cuius portio illa eſt ad BD radium ſphæræ portionis ABC. Quare proportio Sectoris FBGH ad Sectorem ABCD compoſita eſt ex ſuperficiebus in ratione BH ad BD, & ex iiſdem altitudinibus BH

ad BD.

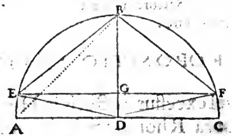
ad BD. In duplâ igitur ratione BH ad BD, eſt Sector FBGH ad Sectorem ABCD; quod erat propoſitum demonſtrare.

PROPOSITIO LXVII.

Caſſis vel exceſſus Sectoris in Hemiſphærio ſupra Rhombum ſuum eſt ad Hemiſphærium ſicut quadratum altitudinis eiuſdem Caſsidis ad duplum quadrati axis Hemiſphærij.



SIt enim in Hemiſphærio ABC, Sector EBFD, diuiſus plano per EF ad baſim AC parallelo, ſecante etiam axem BD, in puncto G. Dico partem ſolidam EBF ſphæricâ ſuperficie tectam portionis EBF, intra verò excauatam ſuperficie conicâ Coni EBF (quã Caſſidem vocamus) eſſe ad Hemiſphærium ABC, ſicut quadratum lineæ BG ſcilicet altitudinis eiuſdem Caſſidis, ad duplum quadratum BD vel quadratũ AB.



Cùm enim Sector E B F D ſit æqualis Cono ex radio E B & altitudine B D; Rhombus verò E B F D ſit æqualis Cono ex râdio E G & eâdem altitudine BD; igitur Sector E B F D erit ad Rhombum E B F D ſicut baſis ad baſim, vel ſicut quadratum E B ad quadratum E G. Atqui exceſſus Sectoris ſupra Rhombum eſt ipſa Caſſis, & exceſſus quadrati E B ſupra quadratum E G eſt quadratum B G; per conuerſionem igitur rationis ſicut Sector E B F D ad Caſſidem ſuum E B F, ita quadratum E B ad quadratum B G. Rurſus Conus ex radio A B & altitudine B D æqualis eſt Hemiſphærio; Ergo Sector EBFD erit ad Hemiſphæriũ A B C, ſicut quadratum E B ad quadratum A B. Ex æquali igitur erit ſicut Caſſis E B F ad Hemiſphærium A B C; ita quadratum altitudinis ipſius Caſſidis ſcilicet lineæ B G, ad quadratum A B, vel ad duplum quadrati axis Hemiſphærij; quod erat propoſitum demonſtrare.

COROLLARIVM.

Hinc euidens fit, quod Caſſis in ratione datâ ad Hemiſphærium conſtitui poſſit, modò ratio non excedat ſubduplam; & ad ſphæram in quâcunque datâ ratione minore. In Hemiſphærio enim fiat quadratum BG in ratione datâ ad duplum quadrati BD; & Caſſis erit ad Hemiſphærium in eâdem ratione. In Sphærâ verò quadratum altitudinis ad quadruplum quadrati radij, vel ad quadratum diametri Sphæræ conſtituendum eſt in ratione datâ; & tunc Caſſis in eâdem ratione erit ad Sphæram cuius pars ipſa eſt. In demonſtrando verò occurret ſector ille hemiſphærio maior, de quo in ſecundo Coroll. Prop. 14. loquuti ſumus.

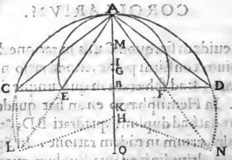
PROPOSITIO LXVIII.

Caſſides eiuſdem altitudinis ſunt ad inuicem ſicut Radij Sphærarum quarum ſunt partes.

SVnto enim circa axem AB duæ Caſſides CAD, EAF eiuſdem altitudinis, & ſint radij ſphærarum quarum ipſæ ſunt partes rectæ AH & AG; & fiat ſicut HA ad BA ita BA ad IA; & iterum ſicut GA ad BA, ita BA ad KA.

Et quoniam ſunt duæ ſeries proportionalium, & in vtraque, linea BA eſt media, erit rectangulum HA

in IA



in I A æquale rectangulo G A in K A ; & ideo ſicut H A ad G A , ita K A ad I A : Sed cum proportio Hemiſphærij , cuius radius H A ad Caſſidem C A D; ſit ſicut duplum quadrati H A ad quadratum B A; erit dimidium eiuſdem Hemiſphærij ad eandem Caſſidem ſicut quadratum H A ad quadratum B A , vel ſicut linea H A ad lineam I A ; ſimiliter monſtrabitur quòd dimidium Hemiſphærij ex radio G A erit ad Caſſidem E A F ſicut G A ad K A : Fiat iam ſicut H A ad G A , ita G A ad M A.

67. huius.

Cum igitur proportio dimidij Hemiſphærij ex radio H A ad ſuam Caſſidem C A D, hoc eſt lineæ H A ad lineam I A , compoſita ſit ex ratione H A ad G A (ſcilicet axium) G A ad K A , (dimidij hemiſphærij ex radio G A ad Caſſidem ſuam E A F) & K A ad IA (ratione etiam axium) videlicet ex duplâ ratione axis H A ad axem G A , & ratione G A ad K A : Proportio verò eiuſdem dimidij hemiſphærij ex radio H A ad Caſſidem E A F , componitur ex ratione ſuâ ad Caſſidem ſimilem Caſſidi E A F ex eodem radio H A , vi-

deli-

delicet ad Caſſidem L A M, hoc eſt ex ratione lineæ G A ad K A, & ex ipſius Caſſidis L A N ratione ad Caſſidem E A F ei ſimilem, id eſt ex triplâ ratione radiorum ad inuicem H A ad G A. Quare reductis rationibus compoſitis ad minimos terminos, erit compoſita ex duplâ ratione H A ad G A & ratione G A ad K A eadem quæ ſimplâ ratio H A ad G A & H A ad K A, ſcilicet quadrati H A ad rectangulum GAK; & compoſita ex triplâ ratione H A ad G A, & ratione G A ad K A, eſt eadem quæ dupla ratio H A ad G A (ſcilicet H A ad M A) & H A ad K A, hoc eſt ſicut quadratum ex H A ad rectangulum MAK. Quare cum idem quadratum H A ſit ad rectangulum GAK ſicut dimidium Hemiſphærij ex radio H A ad Caſſidem C A D, & ad rectangulum MAK ſicut idem dimidium Hemiſphærij ad Caſſidem E A F, oportet quod Caſſis C A D ſit ad Caſſidem E A F, ſicut rectangulum G A K ad rectangulum M A K, hoc eſt ſicut linea G A ad lineam M A, vel ſicut radius H A ad radium G A. Sunt igitur Caſſides eiuſdem altitudinis in ratione radiorum Sphærarum ſuarum, quarum ſunt partes; ſicut demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

I. Sphæra ad Caſſidẽ eiuſdem altitudinis ſicut radius ad radium ſphęræ cuius pars illa caſſis eſt.

Hinc colligitur quòd Sphæra etiam circa eundem axem A B, ſcilicet altitudinem Caſſidis, ſit ad Caſſidem, in ratione radij eiuſdem ſphæræ, ad radium ſphęræ cuius pars illa Caſſis eſt.

Patet

II. Caſſides eiuſdem altitudinis in ratione ſuperficierum ſphæricarum.

Patet etiam quod Caſſides, ſiue ſint eiuſdem ſphæræ, ſiue diuerſarum, ſint ſemper ad inuicem in ratione compoſitâ ex ſuperficiebus ſphæricis, & altitudinibus. Nam ſi ſint eiuſdem altitudinis ſunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum. Suppponantur enim in figura præcedente omnia ſecari plano per axem A B: manifeſtum eſt iam rectangulum ex duplâ A H in AB æquale eſſe quadrato A C; rectangulum etiam ex duplâ A G in eandem A B æquale quadrato A E; quapropter quadratum A C ad quadratum A E ſe habet ſicut dupla A H ad duplam A G, hoc eſt ſicut A H ad A G; & ideo per demonſtrata erit Caſſis C A D ad Caſſidem E A F, ſicut quadratum A C ad quadratum A E, vel ſicut ſuperficies Sphærica Caſſidis C A D ad ſuperficiem ſphæricam Caſſidis EAF. Producatur iam axis A H, & fiat ſicut A G ad A H, ita A B ad A O; & erit A O altitudo Caſſidis L A N; & manifeſtum eſt quòd ratio Caſſidis L A N ad Caſſidem E A F ſui ſimilem ſit etiam compoſita ex ſuperficiebus & altitudinibus; ſunt enim in triplicatâ ratione radiorum AH ad A G: quadratum enim A L ad quadratum A E eſt dupla ratio A H ad A G, vel A O ad A B; ſed ſuperficies earum ſphæricæ ſunt ſicut quadrata A L & A E; & ideo ſunt in ratione compoſita ſicut dictum eſt.

III. Caſſides eiuſdem ſphæræ in ratione cõpoſita ex ſuperficiebus & altitudinibus.

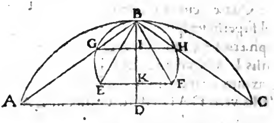
Sed ſint eiuſdem Sphæræ, ſicut Caſſis L A N ad Caſſidem C AD; Dico etiam rationem eſſe compoſitam ex ſuperficiebus & altitudinibus earum. Ducatur enim linea C L; & quoniam peripheria A D æqualis eſt peripheriæ A C, erit angulus A L C æqualis angulo A C E, & angulus A communis; ideo triangula ALC

& ACE ſunt ſimilia; & ſicut AL ad AC, ita AC ad AE: Quare ſicut quadratum AL ad quadratum AC, vel ſuperficies ſphærica Caſſidis LAN ad ſuperficiem ſphæricam Caſſidis CAD, ita AL ad AE. Sed cùm caſſis LAN ad caſſidem EAF ſit in triplicatâ ratione axium, erit etiam in triplicatâ ratione AL ad AE, Caſſis verò CAD eſt ad Caſſidem EAF in ratione axium, vel AL ad AE. Deducta igitur ſimplâ ratione axium ex triplâ, quæ remanet, ſcilicet dupla ratio AL ad AE, eſt ratio Caſſidis LAN ad caſſidem CAD. Sed demonſtratum eſt quod ſuperficies earum ſphæricæ ſunt in ratione AL ad AE, & altitudines etiam in eâdem. Compoſita igitur eſt ratio Caſſidum in eâdem ſphærâ inter ſe, ex ratione ſuperficierum ſuarum ſphæricarum, & altitudinum; quod oportuit demonſtrare.

PROPOSITIO LXIX.

Ratio Caſsidum ex diuerſis ſphæris & in diuerſis altitudinibus conſiſtentium, componitur ex duplâ ratione axium Sphærarum, quarum ſunt partes, & ex ratione altitudinum.

SInt duæ Caſsides ABC & EBF, diuerſarum ſphærarum partes, & in diuerſis altitudinibus conſiſtẽtes, quæ ob commodum demonſtrationis, circa eundem axem, & tangentes in polo B conſtituantur; & ſecentur ambæ per axem BD, in quo ſit BK altitudo

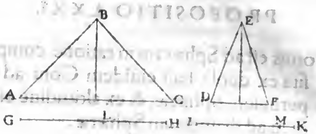


Caſsidis E B F, & ducta ſit G I H per interſectionem lineæ AB cum periphæriâ BE, ſecans axem in I. Quoniam igitur ratio Caſsidis A B C ad Caſsidem E BF componitur ex ratione ipſius ad Caſsidem G BH, hoc eſt ex triplâ ratione A B, ad G B (ſunt enim ſimiles,) & ex Caſside G B H ad Caſsidem E B F hoc eſt ex ratione I B ad K B; Eſt autem ſicut A B ad G B, ita radius ad radium, & ita D B ad I B; componitur itaque ratio Caſsidis A B C ad Caſsidem E B F, ex triplâ ratione B D ad I B, & ratione I B ad K B, hoc eſt ex duplâ ratione B D ad I B, videlicet axium, & ratione D B ad K B, ſcilicet altitudinum. Ratio igitur Caſsidum ex diuerſis Sphæris & diuerſis altitudinibus componitur ſicut in propoſitione enuntiatum eſt.

PROPOSITIO LXX.

Coni eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe in ratione reliquarum diametrorum Sphærarum, in quibus ſunt inſcriptibiles.

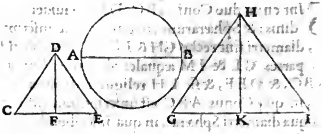
Sint



Sint enim duo Coni A B C, D E F, eiuſdem altitudinis; & Sphærarum, in quibus ſunt inſcriptibiles, diametri ſint rectæ GH & IK, a quibus abſcindantur partes G L & I M æquales altitudini Conorum A B C, & D E F, & ſit L H reliquum diametri Sphæræ, in quâ Conus A B C eſt inſcriptibilis; M K vero reliqua diametri Sphæræ, in quâ inſcribendus eſt Conus D E F. Dico conum A B C eſſe ad conum D E F, ſicut L H ad M K. Quoniam enim Coni A B C, & D E F ſunt in eâdem altitudine; ſunt inter ſe ſicut baſes, hoc eſt ſicut quadratum A C ad quadratum D F, vel ſicut rectangulum H L G ad rectangulum K M I; quæ, quoniam G L æqualis eſt I M, ſunt in ratione L H ad M K, quæ ſunt reliquæ diametrorum ſphærarum in quibus coni A B C & D E F ſunt inſcriptibiles. Coni igitur eiuſdem altitudinis, ſunt inter ſe in ratione reliquarum diametrorum ſphærarum, in quibus ſunt inſcriptibiles.

PROPOSITIO LXXI.

Conus eſt ad Sphæram in ratione compoſitâ ex duplâ baſi eiuſdem Coni ad ſuperficiem Sphæræ, & ex altitudine eiuſdem ad diametrum Sphæræ.



ESto ſiquidem Sphæra A B & conus C D E cuius axis D F; Dico Conum C D E ad ſphæram A B, eſſe in ratione compoſitâ ex duplâ baſi C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, hoc eſt ad circulum ex radio æquali diametro ſphæræ A B, & ex altitudine Coni D F ad ipſam diametrum ſphæræ A B: Fiat enim Conus G H I cuius baſis ſit æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, altitudo vero eadem quæ diametri A B ſphæræ; & manifeſtum eſt quòd Conus ille æqualis erit ſphæræ A B.

Et quoniam Conus C D E eſt ad conum G H I in ratione compoſitâ ex baſi C E ad baſim G I, & altitudine D F ad altitudinem H K; Conus vero G H I factus eſt æqualis ſphæræ A B; ratio igitur Coni C D E

ad

ad ſphæram A B componitur ex ratione baſis C E coni C D E ad baſim G I coni G H I, & altitudine D F, ad altitudinem H K, vel diametrum A B ſphæræ; Sed baſis Coni G H I facta eſt æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, & eadem eſt ratio baſis C E coni C D E ad dimidiam ſuperficiem, quæ duplæ baſis ad totam ſuperficiem ſphæræ; Quare ratio coni C D E ad ſphæram A B componitur ex ratione duplæ baſis eiuſdem C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, & altitudinis coni D F ad diametrum ſphæræ A B.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur quod ſi Conus & ſphęra ſint eiuſdem altitudinis, conus erit ad ſphęram ſicut dupla baſis coni ad ſuperficiem ſphęræ.

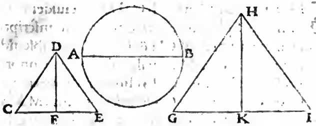
PROPOSITIO LXXII.

Inuenire Portionem ſphæræ eiuſdem altitudinis, in ratione datâ maiore ad datam ſphæram.

SIt enim ſphęra A data, ratio vero quam habet B ad C, & oporteat inuenire portionem ſphæræ in altitudine diametri Sphæræ A, quæ habeat rationem lineę B ad lineam C. Fiat igitur ſicut C ad B; ita diameter ſphæræ A ad lineam F G, & quoniam F G, maior eſt diametro ſphæræ A, abſcin-

PROPOSITIO LXXI.

Conus eſt ad Sphæram in ratione compoſitâ ex duplâ baſi eiuſdem Coni ad ſuperficiem Sphæræ, & ex altitudine eiuſdem ad diametrum Sphæræ.



ESto ſiquidem Sphæra A B & conus C D E cuius axis D F; Dico Conum C D E ad ſphæram AB, eſſe in ratione compoſitâ ex duplâ baſi C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, hoc eſt ad circulum ex radio æquali diametro ſphæræ A B, & ex altitudine Coni D F ad ipſam diametrum ſphæræ AB: Fiat enim Conus GHI cuius baſis ſit æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, altitudo vero eadem quæ diametri A B ſphæræ; & manifeſtum eſt quòd Conus ille æqualis erit ſphæræ A B.

Et quoniam Conus C D E eſt ad conum G H I in ratione compoſitâ ex baſi C E ad baſim G I, & altitudine D F ad altitudinem H K; Conus vero G H I factus eſt æqualis ſphæræ A B; ratio igitur Coni C D E

ad

ad ſphæram A B componitur ex ratione baſis C E coni C D E ad baſim G I coni G H I, & altitudine D F, ad altitudinem H K, vel diametrum A B ſphæræ; Sed baſis Coni G H I facta eſt æqualis dimidiæ ſuperficiei ſphæræ, & eadem eſt ratio baſis C E coni C D E ad dimidiam ſuperficiem, quæ duplæ baſis ad totam ſuperficiem ſphæræ; Quare ratio coni C D E ad ſphæram A B componitur ex ratione duplæ baſis eiuſdem C E ad ſuperficiem ſphæræ A B, & altitudinis coni D F ad diametrum ſphæræ A B.

COROLLARIVM.

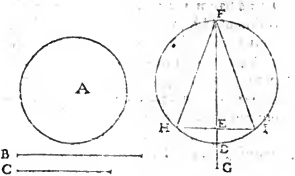
Ex hoc ſequitur quod ſi Conus & ſphęra ſint eiuſdem altitudinis, conus erit ad ſphęram ſicut dupla baſis coni ad ſuperficiem ſphęræ.

PROPOSITIO LXXII.

Inuenire Portionem ſphæræ eiuſdem altitudinis, in ratione datâ maiore ad datam ſphæram.

SIt enim ſphęra A data, ratio vero quam habet B ad C, & oporteat inuenire portionem ſphæræ in altitudine diametri Sphæræ A, quæ habeat rationem lineę B ad lineam C. Fiat igitur ſicut C ad B; ita diameter ſphæræ A ad lineam F G, & quoniam F G, maior eſt diametro ſphæræ A, abſcin-

datur



datur ab eâ pars F E æqualis diametro ſphęræ A; & diuiſâ reliquâ E G in tres partes æquales, quarum E D ſit vna, fiat circa diametrum F D, ſphęra H F I D, quâ ſectâ plano per E ad diametrum recto, eius portio HFI erit eiuſdem altitudinis cum Sphęrâ: Dico portionem H F I eſſe ad ſphęram A, ſicut linea B ad lineam C.

Ductis igitur rectis H F & F I, concipiatur Portio H F I, compoſita ex Cono & Caſside; Conus vero HFI ad ſphęram A eiuſdem altitudinis (cùm habeat rationem compoſitam ex duplâ baſi Coni ad ſuperficiem ſphęræ, & altitudine eiuſdem Coni ad diametrũ ſphæræ) eſt ſicut duplum quadratum H E ad quadratum F E. Iterum Caſsis H F I eſt ad ſphęram A eiuſdem altitudinis, ſicut DF ad diametrum ſphęrę A, hoc eſt lineam F E, vel ſicut rectangulum D F E vel quadratum H F ad quadratum F E; Conus igitur & caſsis, hoc eſt Portio H F I, ad ſphęram A, habet rationem quam habent ſimul duplum quadrati H E vnà cum

7 1. huius & Coroll.

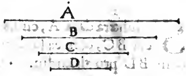
Coroll. 1. Prop. 68. huius.

qua-

quadrato H F, ad quadratum F E. Sed rectangulum D F E æquale eſt quadrato H F; Rectangulum verò ex G D in E F æquale eſt duplo quadrato H E; Totum igitur rectangulum G F E, æquale eſt quadrato H F, vnà cum duobus quadratis H E, & ideo ad quadratum F E, ſicut Portio H F I ad ſphęram A: Sed ſicut rectangulum G F E ad quadratum F E, ita eſt linea G F ad lineam F E, hoc eſt B ad C. Portio igitur H F I ad ſphęram A, conſtituta eſt in eâdem altitudine & in ratione datâ B ad C, ſicut oportuit, & quod faciendum erat.

LEMMA.

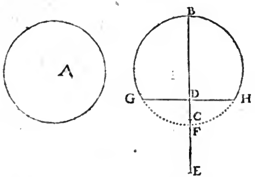
Si ſint quatuor lineæ continuè proportionales, Solidum quod fit ex quadrato alterutrius extremarum in alteram extremam, æquale eſt Cubo ex mediâ proportionali quæ propinquior eſt ei ex quâ fit quadratum.



Sint enim quatuor lineæ cōtinuè proportionales A, B, C, & D, & quoniam ſunt continuè proportionales, erit ſicut quadratum A ad quadratum B, ita linea B ad lineam D; dupla enim eſt ratio B ad D, quæ A ad B: Quare ſi fiat ſolidum ex quadrato A in lineam D erit æquale Cubo ex linea B. Reciprocabuntur enim baſes & altitudines. Similiter etiam demonſtrabitur ſi fiat ſolidum ex quadrato D in A, quod Cubus ex linea C ei æqualis erit.

PROPOSITIO LXXIII.

Sphæræ datæ Portionem æqualem in quâcunque altitudine minore exhibere.



SIt Sphæra data A, cuius diametro æqualis fiat recta BC, & in eâ ſumatur vtcunque punctum D, & ſit BD pro altitudine Portionis exhibendæ æqualis datæ ſphæræ A. Productâ lineâ BC, fiat ſicut quadratum BD ad quadratum BC, ita linea BC ad lineam BE. Diuisâ iam DE in tres partes æquales, quarum DF vna, fiat FB diameter, circa quam deſcripta Sphæra, & ſecta plano ad diametrum recto per punctum D, faciat portionem GBH in altitudine BD. Dico Portionem GBH eſſe æqualem ſphæræ datæ A.

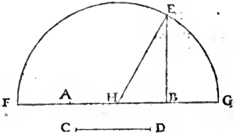
Quo-

Quoniam enim demonſtratum eſt quòd ſicut BE ad BD, ita eſt portio GBH ad Sphæram ex diametro BD; & quoniam factum eſt ſicut quadratum BD ad quadratum BC, ita linea BC ad lineam BE; erit ſolidum ex quadrato BD in latus BE æquale cubo ex BC. Sed ſolidum ex quadrato BD in BE, eſt ad cubum ex BD, ſicut linea BE ad lineam BD; Quare & cubus ex BC ad cubum ex BD, eſt ſicut BE ad BD, vel ſicut portio GBH ad ſphæram ex diametro BD. Sphæræ autem inter ſe ſunt ſicut Cubi ex earum diametris; ideoque ſphæra ex diametro BC eſt ad ſphęram ex diametro BD, ſicut linea BE ad lineam BD; hoc eſt ſicut portio GBH, ad ſphæram ex diametro BD. Sphæra igitur ex diametro BC, hoc eſt Sphæra data A, æqualis eſt portioni GBH; quod faciendum erat.

LEMMA.

Datâ differentiâ laterum rectanguli, & mediâ proportionali inter latera, inuenire latera.

Sit data AB recta differentia laterum rectanguli quæſiti, CD verò media proportionalis inter latera. Lineæ itaque AB applicetur ad angulos rectos linea BE æqualis rectæ CD datæ, & diuiſâ bifariam AB in H, ducatur linea HE, & facto centro H, & interuallo HE, deſcribatur ſemicirculus occurrens lineæ AB productæ in vtramque partem in punctis F, & G. Dico FB, & BG, eſſe latera rectanguli quæſita.



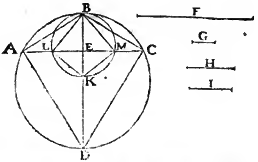
Cùm enim AH ſit æqualis HB, & FH æqualis HG, ſubtractis æqualibus AH & HB, quæ remanent FA & BG æquales inter ſe erunt. Quare exceſſus FB ſupra BG, eſt ipſa AB data; ſed BE etiam æqualis eſt datæ CD, & eſt media proportionalis inter FB & BG; latera igitur rectanguli quæſita ſunt ipſa FB, & BG.

PROPOSITIO LXXIV.

Dato Rhombo in Sphærâ inſcripto, alium in datâ ratione inuenire, qui ſit inſcriptibilis Sphæræ, & cuius Coni ſuperioris altitudo ſit æqualis altitudini ſuperioris Coni in Rhombo dato.

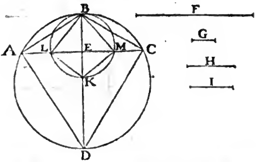
SIt enim Rhombus datus ABCD in ſphęrâ inſcriptus, & ſit ratio data F, ad G, in qua inueniendus ſit alius Rhõbus in ſphęrâ inſcriptibilis, & cuius ſuperioris Coni altitudo ſit eadem cum Cono ABC Rhombi dati, ſcilicet lineæ BE. Fiat igitur linea H media

pro-



proportionalis inter F & G; & ſicut F ad H; ita in plano per axem ſit linea A D rectę I: datâ iam I mediâ proportionali, & B E differentiâ, quærantur extremæ, quarum maiori fiat B K æqualis; (ſi maior fuerit ratio F ad G; ſi verò minor fuerit ratio, tunc producatur axis, & in axe producto quæratur punctum K;) inuento autem puncto K, circa B K, conſtituatur ſphæra & in eâ inſcriptus Rhombus LBMK. Dico Rhombum A B C D eſſe ad Rhombum LBMK ſicut eſt linea F ad lineam G. Lemma præced ẽs.

Quoniam enim Rhombus A B C D compoſitus eſt ex duobus Conis A B C & A D C, quorum baſis communis eſt ex radio A E, amborum verò altitudo eſt axis ſphæræ B D; Conus igitur ex radio baſis A E & altitudine B D, æqualis erit Rhombo dato A B C D; Similiter & Conus ex radio baſis LE, & altitudine BK, æqualis erit Rhombo L B M K. Coni autem, cùm ſint ad inuicem in ratione compoſitâ ex baſibus & altitudinibus, erunt inter ſe in ratione compoſitâ ex quadrato A E ad quadratum L E, & lineâ B D ad lineam



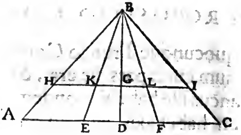
BK. Quadrato verò AE æquale eſt rectangulum BED; & quadrato EL æquale eſt rectangulum BEK. Sed rectangula, cùm habeant communem altitudinem BE, ſunt inter ſe ſicut reliqua latera, ſcilicet in ratione ED ad EK; quare Quadratum AE ad quadratum LE, ſe habet ſicut linea ED ad lineam EK; & Rhombus ABCD erit ad Rhombum LBMK in ratione compoſitâ ex BD ad BK, & ED ad EK; hoc eſt ſicut rectangulum BDE ad rectangulum BKE; vel ſicut quadratum AD ad quadratum LK. Sed linea LK æqualis eſt lineæ I; factum eſt enim rectangulum BKE æquale quadrato I; & linea AD eſt per conſtructionem ad lineam I, ſicut F ad H. Quare quadratum ex AD ad quadratum ex I, vel ad quadratum ex LK, eſt ſicut linea F ad lineam G. Rhombus igitur ABCD eſt ad Rhombum LBMK, ſicut F ad G; quod faciendum erat.

Quicquid de Rhombis in ſphærâ vel Hemiſphærio inſcribendis, vel de ratione eorum inter ſe, vel ad ſphæras aut Hemiſphæria, in quibus inſcribendi ſunt, di-

cen-

cendum reſtat, adeo facile eſt, vt primo intuitu cuiuis appareat: ſunt enim omnes inter ſe ſicut baſes Conorum ſuorum, & ad ſphæras vel Hemiſphæria in quibus ſunt inſcripti, ſunt ſicut baſes Conorum ſuorum ad duplum maximum circulum eiuſdem ſphæræ, vel ad duplam baſim Hemiſphærij, ab his ergo deſiſtam ne tædium lectori pariam.

LEMMA.



Conſtituantur duo Coni A B C & E B F, circa eundem axem B D, & ſuper eodem plano A C; & ſint ambo ſecti plano H I baſi A C parallelo; Dico Conos A B C, & E B F, ſecari a plano H I in eâdem ratione.

Quoniam enim Conus HBI ſimilis eſt Cono ABC, erit Conus H B I ad conum A B C, in ratione triplâ axium ſuorum B G & B D; ſed Conus K B L etiam ſimilis eſt cono E B F, & conſtituti ſunt circa eoſdem axes B G & B D; quare ſunt etiam in triplâ ratione axium B G & B D; & ideo ſicut Conus H B I ad co-

num

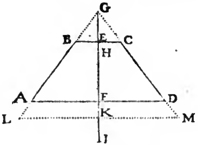
num A B C, ita conus K B L ad conum E B F; & diuidendo, ſicut conus H B I ad truncum A H I C, ita conus K B L ad truncum E K L F. Secti ſunt igitur in eâdem ratione.

Manifeſtum eſt etiam, quòd ſi pluribus ſecti fuerint planis ad baſim A C parallelis, etiam omnes trunci intermedij in eâdem ratione erunt ad Conos integros, vel ad quaſlibet eorum partes. Omnes igitur Coni circa eundem axem conſtituti ſecti ſunt in eâdem ratione ijſdem planis baſi parallelis.

PROPOSITIO LXXV.

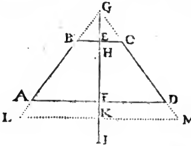
Dato quocunque Trunco Coni, inuenire Conum cuius pars ille erit, & ad quem Truncus ille habebit eandem rationem quam habet axis eius ad axem Coni quæſiti.

Sit Truncus A B C D datus, cuius axis E F concipiatur productus vſque ad verticem G Coni, cuius pars ille truncus eſt; & fiat ſicut F G ad E G, ita E G ad E H. Rurſus producatur axis E F in alteram partem, quantum opus, & fiat F I æqualis G H; & inter G F & G I, fiat G K media proportionalis; & per punctum K, tranſeat planum baſi A D parallelum, ad quod producatur truncus Coni, & cōpleatur Conus L G M. Dico iam Conum L G M eſſe conum quæſitum, ad quem Truncus datus A B C D, habet eandem



rationem quam habet axis trunci E F ad G K axem Coni L G M. Quoniam enim ſicut A D ad B C, vel A F ad B E, ita eſt F G ad G E, & ita G E ad E H; erit G H aggregatum ſecundæ & tertiæ, quarum F G prima in ratione A F ad B E; & quoniam F I facta eſt æqualis G H, erit G I aggregatum trium proportionalium in eâdem ratione, quarum F G maior. Iterum cum ſit alia ſeries proportionalium quarum G I maior, F G minor, K G verò media; ſi facto centro G, & radio vel axe K G, deſcriptum fuerit Hemiſphærium ſectum planis per F, & E, baſi parallelis, ſegmentum intermedium inter plana per F & E, erit ad Hemiſphærium ſicut axis E F ſegmenti, ad axem Hemiſphærij G K. Exceſſus enim triplæ G I ſupra tres proportionales priores, videlicet ſupra rectam G I aggregatum ipſarum, hoc eſt dupla G I, ad duplam GI, eſt ratio quam habet ſegmentum intermedium ad ſectorem ſecundum eiuſdem ſuperficiei ſphæricæ, & inter eadem plana interceptum. Quare ſegmentum illud erit ad Hemiſphærium ſicut E F ad G K. Iterum ex Corollario 2. propoſitionis 27. apparet, quòd ſimi- *Vide Propoſit. 26. & 27. huius.*

liter



liter Conus rectangulus ijſdem planis ſectus, habebit eandem rationem ad fruſtum ſuum intermedium inter eadem plana parallela interceptum, quam habet axis ad axem, & per præcedens Lemma demonſtratur quòd omnes Coni circa eundem axem & ſuper eâdem baſi conſtituti, ſecti ſint ijſdem planis in eâdem ratione. Quare Truncus ABCD, erit in eâdem ratione ad Conum LGM, ac ſi eſſet Conus rectangulus, hoc eſt ſicut EF ad GK. Inuentus eſt igitur Conus LGM, ad quem Truncus datus ABCD habet rationem, quam habet axis eius EF, ad axem GK Coni LGM, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt quòd Conus ſecari poſſit ita, vt truncus intermedius ſit ad Conum datum in ratione datâ.

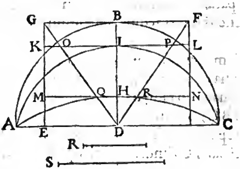
Inſuper & aliæ ſectiones Hemiſphærij excogitari poterunt quæ ex præmiſſis Coni & Hemiſphærij ſectionibus dependent, ita vt in ratione datâ ad Hemiſphæ-

rium,

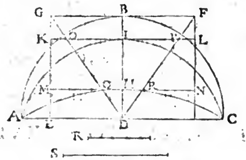
rium, partes ipſarum intermediæ conſtituendæ ſint: de quibus quoniam a nullo (quod ſciam) hactenus tractatum eſt, licebit ipſis noua imponere nomina? Ideoque vocabimus eas Lunulares, Cylindrales, & Campanales, ex ſimilitudine vel ex ratione ſectionum ipſarum. Primum igitur de Lunularibus dicemus.

PROPOSITIO LXXVI.

Lunulare Segmentum intermedium in ratione datâ ad Hemiſphærium conſtituere.



SIt ratio data quam habet linea R ad lineam S, & ſit Hemiſphærium ABC, cuius axis BD, circa quem conſtituatur Cylindrus EF, cuius baſis ex radio ED ſit dimidia baſis Hemiſphærij AD, & ideo Cylindrus EF, cùm ſit eiuſdem altitudinis cum Hemiſphærio, erit ad Hemiſphærium ABC in ratione ſub-



ſeſquitertiâ. Inſcribatur igitur in Cylindro E F conus G D F, & erunt ſimul Cylindrus E F cum Cono GDF æquales hemiſphærio ABC. Secetur iam Conus GDF, & Cylindrus E F, duobus planis K L & M N, ad baſim G F parallelis, ſecantibus axem B D ita in I & H, vt ſit Truncus intermedius ad Conum G D F, ſicut R ad S.

Coroll. Prop. 75.

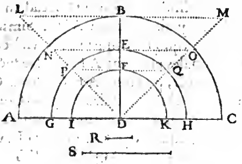
Quoniam igitur demonſtratum eſt quòd quadratum AD vnà cum tertiâ parte quadrati BD, ſint æqualia duplo quadrato radij baſis Cylindri æqualis Hemiſphærio A B C; Similiter & quòd quadratum A D vnà cum tertiâ parte quadrati H D, ſimul ſint dupla quadrati radij baſis Cylindri æqualis portioni A H C, & eiuſdem altitudinis: Similiter etiam quod quadratum A D cum tertiâ parte quadrati I D, ſimul dupla ſint quadrati radij baſis Cylindri æqualis, & eiuſdem altitudinis cum portione A I C: Cùm inquam hæc omnia ſint dupla; erunt quadratum E D, quod dimidium eſt quadrati A D, vnà cum ſextis partibus quadratorum ſingularum rectarum B D, H D, & I D,

58. huius.

æqualia ſingulis quadratis radiorum baſium Cylindrorum æqualium, & habentium eandem altitudinem cum ſingulis portionibus ABC, AIC & AHC. Vnde manifeſtum eſt, quòd, cùm Cylindrus EF cum Cono GDF, (qui cum ſit tertia pars ipſius EF Cylindri, erit ſexta pars Cylindri ex radio BD, & altitudine eadem BD) ſit æqualis Hemiſphærio ABC; quòd Cylindrus EL vnà cum cono ODP, (qui etiam eſt ſexta pars Cylindri ex radio ID & eâdem altitudine) ſint etiam æquales portioni AIC. Simili ratione demonſtrabitur, quòd Cylindrus EN vnà cum cono QDR ſint æquales portioni AHC. Deductis igitur ex Portione AIC, portione AHC, & ex Cylindro AL cum cono ODP, Cylindro EN cum Cono QDR, quod remanet, ſcilicet ſegmentum Lunulare intermedium AICH, æquale erit Cylindro ML, vnà cum trunco Coni intermedio OQRP. Sed Truncus intermedius OQRP eſt ad Conum ſuum GDF, ſicut linea IH ad lineam BD; & Cylindrus intermedius ML, eſt ad Cylindrum totum EF, ſicut eadem IH ad eandem BD; componendo igitur, Truncus OQRP cùm Cylindro ML ſimul, ad Conum GDF cum Cylindro EF, hoc eſt ad Hemiſphærium ABC, eſt ſicut linea IH ad lineam BD. Ex æquali ergo Segmentum Lunulare intermedium AICH erit ad Hemiſphærium ABC, ſicut linea IH ad lineam BD, vel ſicut linea R ad lineam S; quod faciendum erat.

PROPOSITIO LXXVII.

Segmentum Campanale in ratione datâ ad Hemiſphærium conſtituere.



SIt Hemiſphærium ABC, cuius axis BD, & ſit ratio data R ad S, in quâ conſtituendum ſit Segmentum Campanale ad Hemiſphærium ABC. Concipiatur circa axem BD Conus rectangulus cuius vertex D, ita ſectus duobus planis parallelis baſi, vt ſit truncus eius intermedius ad totum Conum, ſicut linea R ad lineam S; & ſint E, & F, in axe BD puncta interſectionum planorum cum axe. Fiant iam duo Hemiſphæria circa centrum D ex radijs DE & DF, quæ ſint GEH & IFK. Signetur Conus rectangulus LDM, & interſectiones planorum cum ipſo Cono rectangulo ſint NO & PQ.

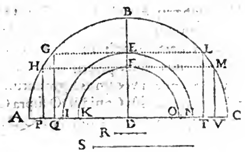
Quoniam igitur Conus rectangulus LDM, eſt dimidium Hemiſphærij ABC; Conus NDO etiam erit dimidium hemiſphærij GEH; nec non & Conus PDQ dimidium hemiſphærij IFK; vnde manifeſtum eſt quòd exceſſus Hemiſphærij GEH ſupra Hemiſphærium IFK, quem vocamus ſegmentum Campanale, ſit duplum exceſsûs Coni NDO ſupra Conum PDQ, hoc eſt duplum trunci Coni NPQO. Quare in eâdem ratione erit ad Hemiſphærium ABC, quâ Truncus Coni NPQO ad Conum ſuum LDM; hoc eſt ſicut EF ad BD; vel R ad S; quod faciendum erat.

PROPOSITIO LXXVIII.

Segmentum Cylindrale in ratione datâ ad Hemiſphærium conſtituere.

SIt iterum, ſicut in præcedente, Hemiſphærium ABC, in quo ſit axis BD ſectus in punctis E & F, ita vt, ſi ducta fuerint plana per eadem puncta ad baſim AC parallela, diſſecent ſegmentum intermedium in ratione datâ ad Hemiſphærium ſicut R ad S, & ſicut pars axis intercepta EF, ad axem Hemiſphærij BD. Tranſeant ergo per illa puncta duo plana ad baſim AC parallela, & ab ijs ſit factum ſegmentum intermedium HGLM: & conſtituantur duo Hemiſphæria circa idem centrum D ſuper eâdem baſi AC, quæ tangant plana GL, & HM; in punctis E, & F, 27. huius.

quo-



quorum differentia, vel exceſſus maioris ſupra minorem, ſit ſegmentum Campanale, quod per præcedentem demonſtrauimus eſſe in ratione datâ ad Hemiſphærium ſicut R ad S.

Iterum per interſectiones planorum GL & HM cum ſuperficie ſphæricâ Hemiſphærij ABC, concipiantur duo Cylindri conſtituti inter eadem plana parallela & baſim AC, videlicet Cylindrum GT, & Cylindrum HV, quorum differentiam notatam literis PHGQ, TLMV, vocamus Segmentum Cylindrale, propterea quod latera eius ſint ſuperficies Cylindricæ. Dico Segmentum hoc Cylindrale eſſe ad Hemiſphærium ABC ſicut eſt EF ad BD, vel ſicut ratio datâ R, ad S.

Quoniam enim exceſſus ſegmenti AGLC ſupra Cylindrum GT, hoc eſt Semiannulus Sphæricus deſignatus literis AGQ, TLC, æqualis eſt Hemiſphærio IEN; Semiannulus vero Sphæricus notatus literis AHP, VMC æqualis eſt Hemiſphærio KFO: Segmentum Cylindrale, vel exceſſus maioris ſemiannuli

ſphæ-

ſphærici ſupra minorem, ſignatum literis P H G Q, T L M V, æqualis erit exceſſui Hemiſphærij I E N ſupra Hemiſphærium K F O, vel Segmento Campanali I E N, O F K: Sed ſegmentum Campanale eſt ad Hemiſphærium ſicut pars axis intercepta E F ad totum axem B D; Ita igitur ſe habebit ſegmentum Cylindrale ad idem Hemiſphærium A B C, hoc eſt ſicut R, ad S, quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc palam fit quod ſi ſectus fuerit Conus ita vt eadem foret ratio partis axis interceptæ ad totum, quæ trunci Coni ad Conum cuius pars ille eſt, ſegmentum Hemiſphærij interceptum inter eadem plana, Segmẽtum Lunulare, & Segmentum Campanale intercipientia eandem partem axis, nec non & Segmentum Cylindrale cuius Sphærica ſuperficies ſit eadem quæ ſegmenti intermedij, ſint omnia inter ſe æqualia. Si vero ſectus fuerit axis vtcunque duobus planis, neglectâ ratione quam habent partes ad totos axes, & non fuerit eadem ratio interceptæ partis ad totum axem, quæ trunci Coni ad totum Conum; nihilominus ſegmẽta Cylindralia & Campanalia ſemper inter ſe æqualia erunt, propter æqualitatem Hemiſphæriorum & ſemiannulorum eiuſdem altitudinis; Igitur & exceſſus eorum ſemper neceſſario æquales erunt, Reliqua autem ſegmenta, ſcilicet intermedium Hemiſphærij & ſegmentum Lunulare, nec ſibijpſis nec reliquis æqualia erunt.

COROL-

COROLLARIVM GENERALE.

Continens ea quæ ex demonſtratis colliguntur circa proportiones quinque Solidorum & portionum ipſorum, quæ ex reuolutione Sectionum Conicarum circa axes ſuos fiunt, & in eâdem altitudine exiſtunt. Quæ omnia ad Hemiſphærium eiuſdem altitudinis, velut ad trutinam redacta ponderantur, vt inde rationes ipſorum ad inuicem facilius dignoſcantur.

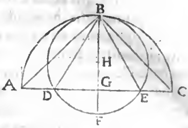
PRimo igitur, ſi Hemiſphæriũ & Sphæra ſint eiuſdem altitudinis, Hemiſphærium erit quadruplum Sphæræ: Sphæra enim cuius axis eſt duplus axis alterius Sphæræ eſt octupla ipſius; Hemiſphærium igitur eſt quadruplum Sphæræ eiuſdem altitudinis.

Hemiſphærium eſt ad Portionem Sphæræ eiuſdem altitudinis, ſicut duplum axis eiuſdem ad lineam compoſitam ex ſemidiametro Sphæræ, cuius Portio illa eſt vnà cum reliquo diametri Sphæræ deducto axe Portionis.

Sit enim Hemiſphærium ABC & in eâdem altitudine & circa eundem axem conſtituatur Portio DBE diſſecta a Sphærâ DBEF cuius diameter BF. Et quoniam Hemiſphærium & Portio ſunt ambo compoſita

ex Co-

ex Conis & Caſſidibus, in hemiſphęrio verò Conus & Caſſis ſunt æquales inter ſe (Conus enim eſt dimidium Hemiſphærij) Conus Portionis DBE eſt ad Conum Hemiſphærij ABC, ſicut quadratum DG ad quadratum AG, vel ſicut linea FG ad lineam BG; Caſſis verò Hemiſphærij ABC (quæ æqualis eſt Cono eiuſdem) eſt ad Caſſidem portionis DBE, ſicut ſuperficies Sphærica ipſius, ad ſuperficiem Sphæricam Portionis vel Caſſidis eius DBE, hoc eſt ſicut quadratum AB ad quadratum DB, vel ſicut dupla BG ad FB, id eſt ſicut ipſarum dimidia BG ad FH: Sed cùm ratio Coni portionis DBE ad Caſſidem ſuam compoſita ſit ex rationibus FG ad BG, & ipſius BG ad FH, erit Conus ad Caſſidem in eâdem portione DBE, ſicut FG ad FH; & vtraque ſimul ad Conum Hemiſphærij ABC, ſicut compoſita ex vtriſque FG & FH, ad lineam BG; & ad Hemiſphærium ſicut compoſita ex FG & FH, hoc eſt ex ſemidiametro ſphæræ DBEF & reliquo diametri, dempto axe portionis BG, ad duplam BG; & conuertendo, ſicut Hemiſphærium ABC ad portionem DBE, ita dupla BG ad compoſitam ex HF & GF. II.



Corol. 2. Prop. 68.

Hemiſphærium ad Hemiſphæroides eiuſdem altitudinis ſe habet ſicut Baſis ad baſim. Manifeſtum eſt quoniam Coni, qui ſunt ipſorum dimidia, ſunt in eâdem ratione. III.

IV. Hemiſphærium eſt ad Conum eiuſdem altitudinis, ſicut duplum baſis hemiſphærij ad baſim Coni.

V. Hemiſphærium eſt ad Conoides Parabolicum eiuſdem altitudinis, ſicut Baſis Hemiſphærij ad duas tertias baſis Conoidis Parabolici. Si enim fiat Conus ſuper baſi Conoidis Parabolici & in eâdem altitudine, erit ad Conoides Parabolicum ſicut tria ad quatuor, ideoque Hemiſphęrium erit ad illud, ſicut duplum baſis ad quatuor tertias ipſius baſis Conoidis, vel ſicut Baſis Hemiſphærij ad duas tertias baſis Conoidis Parabolici.

VI. Hemiſphærium eſt ad Conoides Hyperblicum, eiuſdem altitudinis, ſicut duplum baſis Hemiſphærij ad baſim Conoidis Hyperbolici, vnà cum parte quæ ſit ad eandem, ſicut dimidium tranſuerſæ diametri ad totam tranſuerſam diametrum cum axe Conoidis tanquam vnam. Hoc colligitur ex propoſitione 27. Archimedis de Conoidibus & Sphæroidibus, vbi demonſtratur, quòd Conoides Hyperbolicum ſit ad Conum habentem eandem cum ipſo baſim & eundem axem, ſicut linea compoſita ex axe portionis & triplâ ſemidiametri ſectionis, ad eundem axem & duplam eiuſdem ſemidiametri tanquam vnam: Vnde diuidendo erit exceſſus Conoidis Hyperbolici ſupra Conũ ſuum ad conũ ſuum, ſicut dimidium tranſuerſę diametri ad tranſuerſam diametrum vnà cum axe Conoidis tanquam vnam: Ideoque Hemiſphærium erit ad Conoides Hyperbolicum, ſicut duplum baſis ſuæ ad baſim Conoidis Hyperbolici vnà cum parte quæ ſit ad ipſam, ſicut dimidium tranſuerſæ diametri ad totam tranſ-

uerſam diametrum vna cum axe Conoidis tanquam vnam: quod probandum erat.

Hæc ſunt quę hactenus ad diſſectionem Hemiſphęrij excogitauimus; Multa autem deſiderantur quorum reſolutio a ſolidis dependet: Ratio autem cur hæc demonſtrari poſſint ex principijs Euclidis, illa verò ſine ope duarum mediarum proportionalium non poſſint, breuiter quantum poſſum demonſtrabo, vbi prius ea quæ hucuſque demonſtrata ſunt recenſuero.

RECAPITVLATIO.

Continens ea quæ in præcedentibus demonſtrantur, & obiter animaduertens aliqua principalia quæ deſiderantur, & ex medijs planis, vel Principijs Euclideis nondum reſolutionem acceperunt nec vnquam vti credo acceptura ſunt, vnà cum illorum reſolutione per media ſolida, & conſtructione cuiuſdam lineæ Cubatricis, cuius ope facillimè exhibentur inter duas extremas duæ medię continuè proportionales, & multę aliæ propoſitiones ſolidæ non hactenus reſolutæ.

EX Prop. 1. fit Cylindrus æqualis Hemiſphærio, & eiuſdem altitudinis: ſequitur ex 32. lib. 1. Archimedis de Sphærâ & Cylindro.

Ex Prop. 6. 8. & 9. demonſtratur, quod, ſi Hemiſphærio conſtituatur Cylindrus in eâdem altitudine æqualis, & ſecta fuerint ambo Plano, vel pluribus planis ad baſim parallelis, partes Cylindri interceptæ inter quælibet plana parallela ſemper æquales erunt quibuſlibet ſectoribus, ſiue ſint primi ſiue ſecundi eiuſdem Hemiſphærij, & quorum ſuperficies Sphæricæ inter eadem plana parallela interceptę ſunt. Vnde conſequitur quòd Hemiſphærio conſtitui poſſit in ratione datâ minori, Sector vel primus, vel ſecundus, vel intermedius.

Ex 7. & 10. probatur quod Conus Segmenti vnà cum Cono rectangulo eiuſdem altitudinis ſimul ſumpti æquales ſint dimidio ſectoris ſecundi.

Ex 11. docemur conſtituere duos Conos, quorum alter ſit rectangulus, in eâdem altitudine & in quâcunque ratione datâ ad inuicem. Et ex 13. docemur inſcribere Hemiſphærio duos Conos in ratione datâ: Sed Cono dato facere Conum rectangulum æqualem eſt opus duarum mediarum, ſicut infra monſtrabitur.

Ex 12. demonſtratur qui ſit maximus Conus in Hemiſphærio inſcriptibilis.

Ex 14. & Corollario eiuſdem docemur conſtituere Conum ſuper baſi cuiuſcunque portionis æqualem Portioni datæ: Sed Cono dato Inuenire Portionem æqualem & ſuper eâdem baſi eſt opus ſolidum, ſicut infra apparebit.

Ex 18. docemur inuenire Sectorem qui ad Conum ſuum habeat rationem datam: & ex 19. Inuenire Sectorem in ratione datâ ad Portionem ſuam.

Per 20. demonſtratur ratio partium Segmenti inter ſe, videlicet Sectoris ſecundi & Coni ſegmenti. Et in 21. docemur conſtituere dictas partes in ratione datâ poſſibili.

Per 22. demonſtratur ratio quam habet ſegmentum intermedium ad partem Cylindri æqualis hemiſphærio inter eadem plana interceptam.

In 23. demonſtratur æqualitas Segmenti ad tres Conos eiuſdem altitudinis. Et per 24. conſtituitur Segmentum in ratione datâ ad Conum rectangulum eiuſdem altitudinis.

In 25. agitur de ſegmento Intermedio, & conſtituitur in ratione datâ ad ſectorem ſecundum eiuſdem ſuperficiei Sphæricæ. Et in 26. & 27. ſecatur Hemiſphærium duobus planis intercipientibus Segmentum Intermedium, quod habeat rationem datam ad Hemiſphærium. Vnde etiam in 28. demonſtratur quòd datâ ratione partium axis reliquarum, quæ vltra axem Segmenti ad polum & centrum Hemiſphærij exiſtũt, inuenietur Segmentum Intermedium æquale Sectori ſecundo eiuſdem ſuperficiei Sphæricæ.

Ex 29. fit Portio in ratione datâ ad partem Cylindri æqualis Hemiſphærio, eiuſdem cum portione altitudinis.

Ex 30. Inquiritur ratio Portionis ad Conum ſuum: vnde etiam colligitur, & demonſtratur ratio Portionis ad Hemiſphærium.

In 31. quemadmodum in 7. demonſtratum erat quòd exceſſus Cylindri conſtituti ſuper baſi Hemiſphærij, & in eâdem altitudine, ſupra Conum rectangulum in eodem Cylindro inſcriptum, erat æqualis Hemiſphærio, ita nunc demonſtratur, quod exceſſus eiuſdem Cylindri ſupra Hemiſphærium, æqualis ſit Cono rectangulo in eodem inſcripto, & quòd ſingulæ partes eiuſdem exceſſus prædicti æquales ſint ſingulis partibus Coni rectanguli, prout inter eadem plana parallela correſpondent. Vnde alia methodo.

In 32. Demonſtratur ratio Portionis ad Hemiſphærium.

In 33. demonſtratur æqualitas inter quoſdam partes ſeu Portiones Hemiſphærij & aliquas ipſius Cylindri conſtituti ſuper baſi, & iuſdem altitudinis cum Hemiſphærio.

Per 34. & 35. docemur conſtituere Truncos Conorum æquales Portionibus Sphærarum ſuper ijſdẽ baſibus portionum & in ijſdẽ altitudinibus. Et in 36. docemur inſcribere Cylindro Truncũ Coni in ratione datâ.

In 37. demonſtratur quòd exceſſus Trunci Coni ſupra Cylindrum in eodem trunco inſcriptũ ſit æqualis Conoidi Hyperbolico eiuſdem altitudinis, & quòd per ſingulas partes &c.

Similiter in 38. demonſtratur quòd exceſſus Cylindri ſupra Conum inſcriptum æqualis ſit Hemiſphæroidi eiuſdem altitudinis & quòd ſingulæ partes &c.

In 39. demonſtratur quòd ſi in Trunco Coni inſcriptus fuerit Cylindrus, & iterum in Cylindro Truncus Coni, ita vt ſi ſecti fuerint omnes ſimul plano per

axem, & latera oppoſita Trapeziarum in truncis factarum ſint parallela, quod ambo exceſſus ſimul ſumpti (videlicet maioris Trunci ſupra Cylindrum & Cylindri ſupra minorem truncum) æquales ſint Conoidi Parabolico: & quòd ſingulæ partes &c. Vnde manifeſtum eſt quòd Conoides Hyperbolicum, & Hemiſphæroides, ſimul conſtitui poſſint in eâdem altitudine, vt ſit Conoides Hyperbolicum duplum Hemiſphæroidis, & ambo ſimul ſumpta æqualia Conoidi Parabolico eiuſdem altitudinis,& ſic etiam de ipſorum Truncis vtcunque diſſectis, planis vel ad baſim parallelis vel non, facillime demonſtrari poteſt, quod ſint ſemper ad inuicem in iiſdem rationibus ſicut toti.

In 40. demonſtratur quòd exceſſus Trunci Coni ſupra Conum eiuſdem altitudinis, quorum latera ſunt parallela, æqualis ſit Fruſto Conoidis Parabolici.

In 41. demonſtratur quòd omnis Portio Sphæræ excedat Conum ſuum quantitate Sphęroidis lati,cuius diameter maior æqualis ſit lateri Coni in portione inſcripti, diameter vero minor æqualis ſit axi eiuſdem Coni vel Portionis.

A 42. Incipit de Maximis Inſcriptis & Minimis circumſcribentibus diſquiſitio,hoc eſt de Conis & Conoidibus, Sphæris, & Sphæroidibus vel eorum Portionibus, & vniuſcuiuſque horum inuicem Inſcriptione, & circumſcriptione: & præmiſſo Lemmate demonſtratur primò, quòd Maximum Solidum quod fieri poteſt ex ſegmentis cuiuſuis rectæ,eſt quando ſegmentum maius eſt duplum reliqui, & tunc quòd maximum Solidum eſt illud, quod factum eſt ex quadra-

to maioris Segmenti in minus. Et continuatur hæc diſquiſitio vſque ad 57. propoſitionem.

In 58. demonſtratur ratio quam habet baſis portionis ad baſim Cylindri ei æqualis, & eiuſdem altitudinis. Et in 60. quòd omnis Portio ſit æqualis tribus Conis ex eâdem baſi, & dimidiâ altitudine eiuſdem, vnà cum ſphærâ cuius diameter ſit æqualis altitudini ipſius portionis.

Per 59. demonſtratur quòd ſi duæ Sphæræ inæquales ſe mutuò intus tangant, quarum diametri fuerint in ratione ſeſquialterâ, & ſi ambo ſectæ fuerint plano ad diametrum communem recto, tunc Conus in maioris Sphæræ Portione inſcriptus, æqualis erit Portioni minoris Sphæræ quæ circa eũdem axem conſtituitur.

In 61. 62. & 63. agitur de Sphærarum inæqualium Segmentis in eâdem altitudine exiſtentibus; & in priori demonſtratur quòd exceſſus ipſorum ſupra Cylindros in ipſis inſcriptos, ſint inter ſe æquales. In 62. quòd exceſſus ille ſit æqualis hemiſphærio eiuſdem altitudinis. In 63. verò demonſtratur, quomodo conſtituendus ſit Cylindrus æqualis cuicunque Segmento dato, & eiuſdem altitudinis. vnde ſequuntur Corollaria multa.

Per 64. demonſtratur quomodo ſegmento Hemiſphærij dato conſtitui poſſit aliud ſegmentum alterius Hemiſphærij æquale in altitudine datâ poſſibili.

In 65. demonſtratur quòd ſuperficies Sphericæ Portionum diuerſarum Sphærarum ſint ad inuicem ſicut axes vel radij Sphærarum quarum ſunt partes. Et in 66. demonſtratur quòd Sectores diuerſarum ſphæra-

rum

rum ſint in duplâ ratione radiorum Sphærarum quarum ſunt partes,

In 67. demonſtratur ratio, quam habet Caſſis ad Hemiſphærium, vel ad Sphæram cuius pars illa eſt.

In 68. & 69. Demonſtratur ratio quam habent Caſſides ad inuicem, ſiue ſint eiuſdem ſiue diuerſarum Sphærarum partes.

In 70. Conorum eiuſdem altitudinis ratio ad inuicem eſſe ſicut reliquæ diametrorum ſphærarum in quibus ſunt inſcriptibiles demonſtratur: Et in 71. ratio Coni ad Sphæram eſſe compoſita ex duplâ baſi ad ſuperficiem Sphæræ, & ex altitudine ipſius ad diametrum Sphęræ.

Per 72. Conſtituitur Portio in ratione datâ ad Hemiſphærium eiuſdem altitudinis.

Per 73. Sphæræ datæ conſtituitur Portio æqualis in quâcunque minore altitudine.

In 74. agitur de Rhombis in Sphærâ inſcriptibilibus & rationibus ipſorum ad inuicem.

In 75. demonſtratur quomodo ex dato quocunque Trunco Coni, inueniatur Conus cuius pars ille truncus erit, & ad quem habebit eandem rationem quam habet ipſius trunci axis, ad axem totius Coni.

In 76. 77. & 78. Proferuntur tres modi ſecandi Hemiſphærium in ratione datâ, ſegmentis intermedijs: ex quibus duo fiunt ſuperficiebus ſphęricis, reliquum vero ſuperficiebus Cylindricis.

Sed videamus iam quęnam ſint iſtę Propoſitiones deſideratę de quibus loquutus ſum in principio huius recapitulationis, quę per media plana vel Elementa

Euclidis non ſint demonſtranda, & rationem inquiramus quare tales ſint.

Primò autem ſuppono quòd nulli Geometrę ignotum ſit, quod ſolida ſint in triplâ ratione laterum vel linearum homologarum, quod ab Euclide libro 11. prop. 33. demonſtratum eſt: tripla vero ratio ſupponit triſectionem rationis, vel duo media continuè proportionalia. Exempli gratiâ, ſumamus illud quod ſupra ad prop. 11. adnotauimus; & ſit aliquis Conus cuius altitudo ſit A, baſis vero radius B, & ſupponatur quod ei ſit æqualis Conus rectangulus C: & quoniam Conns C eſt rectangulus, altitudo eius erit æqualis radio baſis ipſius, vterque igitur ipſorum vocetur D: Cum igitur Coni ſint inuicem æquales, reciprocabuntur ipſorum altitudines & baſes, ideoque erit ſicut altitudo A ad altitudinem D, ita quadratum eiuſdem D radij baſis Coni C, ad quadratum B radij baſis Coni dati; Quare erit ſicut A ad D, ita quadratum D ad quadratum B; propterea dupla erit ratio A ad D eius quam habet D ad B. Igitur ſi A ponatur prima, & B quarta, D erit tertia in ſerie quatuor continuè proportionalium. Ergo Cono dato non poteſt conſtitui Conus rectangulus æqualis, ſine ope duarum mediarum continuè proportionalium, ſicut antea diximus.

Quod autem in aliquo caſu particulari hoc fieri poſſit non eſt dubium: Nam ſi lineæ propoſitæ inter quas quęruntur duę medię continuè proportionales fuerint in ratione duplâ tunc ex demonſtratis a Vieta in libro Variorum de rebus Mathematicis reſponſorum, ſub titulo Capitis 5. inuenies propoſiti ſatisfactionem. Si

vero

vero ratio fuerit talis (quemadmodum ſi linea A B ſecta fuerit extremâ & mediâ ratione in C, & producta in D, donec fiat ſicut A C ad A B, ita quadratum AB ad quadratum A D) quam habet lineæ A D ad lineam



A C, inueniendæ ſunt duæ mediæ inter A D & A C hoc modo: Producatur iterum linea AD in E, vt ſit quadratum ex A E duplum quadrati ex A B, & concipiatur hemiſphærium cuius axis A E diuiſus in punctis C, & B, & per illa tranſeant plana parallela baſi, ſecantia Hemiſphærium, & ſuper illis concipiantur duo Coni conſtituti habentes ipſorum vertices in centro baſis Hemiſphærij, ſcilicet in puncto A. Dico iſtos Conos inſcriptos hemiſphærio, quorum axes ſunt lineæ A C & A B, fore inter ſe æquales; Conum vero cuius axis AC, habere pro radio baſis ſuę lineam æqualem lineæ A D, & Conum cuius axis A B fore rectangulum. Cum enim quadratum A E per conſtructionem factum ſit duplum quadrati A B; manifeſtum eſt quòd Conus cuius axis AB inſcriptus Hemiſphærio ex radio A E, ſit Conus rectangulus. Iterum cum factum ſit ſicut A C ad A B, ita quadratum ex A B ad quadratum ex A D, manifeſtum etiam eſt quod Conus cuius radius baſis ſit AD & altitudo A C, ſit æqualis Cono rectangulo ex altitudine A B, & eodem radio baſis A B. Quod autem Conus cuius altitudo A C inſcriptus Hemiſphærio ex radio A E, habeat pro radio baſis lineam æqualem lineæ A D ſic probatur. Quo-

niam ſicut A C linea ad lineam A B, ita per conſtructionem factum eſt quadratum AB ad quadratum AD erit diuidendo & inuertendo ſicut quadratum A B ad



exceſſum quadrati A D ſupra quadratum A B, ita A C ad C B. Rurſus quoniam ſicut quadratum A B ad quadratum A C, vel ad rectangulum A B C, ita A B ad B C, per conuerſionem rationis erit ſicut quadratum A B ad exceſſum ſuum ſupra quadratum AC, ita A B ad A C; ſed ſicut A B ad A C, ita A C ad CB; Igitur cum quadratum A B habeat eandem rationem ad vtrumque exceſſum ſcilicet quadrati A D ſupra quadratum A B, & ipſius quadrati A B, ſupra quadratum A C, oportet vt iſti exceſſus ſint æquales, ideo que erit aggregatum quadratorum A D & A C ſimul, æquale duplo quadrato A B hoc eſt quadrato A E radij Hemiſphærij. Quare cum quadratum radij Hemiſphærij ſit æquale duobus quadratis A C & A D, erit A D radius baſis Coni cuius altitudo eſt recta AC, in hemiſphærio ex radio A E inſcripti.

Hinc etiam infinitæ aliæ rationes ab iſtis generantur, inter quas geometricè exhibentur inter duas lineas datas, duæ mediæ continuè proportionales. Si enim ratio data, exempli gratiâ A ad D (inter quas fuerint continue proportionales B & C) continuetur, & fiat ſicut A ad D, ita D ad E, dico quod inter A & E cadet etiam C vna ex medijs proportionalibus; hac tamen differentiâ, quòd ſi inter A & D erat ma-

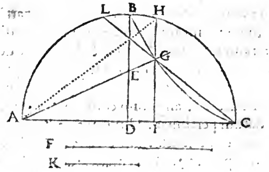
ior media, inter A & E erit minor mediæ; vnde dabitur altera media, quæ ſit G: Iterum ſi ratio A ad D triplicata fuerit & fuerint extremæ datæ A & F, dico G fore vnam ex medijs inter A & F, & ſi inter extremas in duplicatâ ratione erat maior media, inter extremas in triplicatâ ratione erit minor media, & ſic è contrariò. Similiter ſi ratio prima A ad D data, fuerit diuiſa, quæ maior erat media inter primas, erit minor inter ſecundas, & è contrario, & ſi pluries diuiſa fuerit ratio, ſemper eandem legem tenebunt mediæ.

Licet autem aliqui exhibeantur caſus particulares in quibus inueniuntur geometricè duo media, Problema tamen vniuerſaliter eſt Solidum, & dependet ex medijs non demonſtrabilibus per principia Euclidis; veluti ex applicatione lineæ rectæ inter duas rectas poſitione datas, & angulum continentes, quę ad punctum datum pertingat. Huius autem Problematis ſolutioni abunde ſatisfactum eſt a Pappo Alexandrino in libro 4. prop. 23. Mathematicarum collectionum, per lineam Concoidem a Nicomede inuētam & prop. 31. eiuſdem libri per ſectionem Hyperbolicam.

Dauid etiam Riualtus in Commentarijs in Archimedem de Sphærâ & Cylindro ex Eutocio profert modum Spori inueniendi duas medias per lineam in ſemicirculo ductam ab vno ipſius angulo, hac lege, vt pars intercepta inter periphæriam & lineam a reliquo angulo ſemicirculi ductam, bifariam a perpendiculari ductâ a centro diuidatur. Modum etiam Menechmi duabus Sectionibus Parabolicis, & Modum ipſius Eutochij ex compoſitione Parabolæ cum Hyperbolâ, de-

nique modum pulcherrimum Dioclis per lineam Ciſſoidem; Circa quæ quoniam ab ipſo tradita ſunt non amplius moror, immo lectorem ad ipſius commentaria ſatis cognita remitto.

Figuram verò lineæ Caſſoidis & vſum eius pro inueniendis duabus medijs continuè proportionalibus, vtpote vſui maximè accommodam, nec ab ipſo Riualto (quoad vſum) benè demonſtratam, hic annectere operæ pretium duxi.



Sit igitur Semicirculus ABC, cuius Centrum D, a quo erigatur perpendicularis DB; & ſint datæ F, & K, rectæ inter quas inueniendæ ſint duæ mediæ continuè proportionales: Primò autem ducta ſit a puncto B âd angulum C linea Ciſſoides BGC (quomodo autem formetur linea hæc poſtea docebitur) & fiat ſicut F maior extrema ad K minorem, ita AD ad DE, connexâque AE, & productâ donec coincidat cum Ciſſoide in puncto G, per illud tranſeat recta HGI parallela BED; Dico HI & IC eſſe medias continuè

pro-

proportionales inter A I & I G, quæ ſunt in eâdem ratione quâ F ad K.

Quomodo autem formetur linea Ciſſoides ſic accipe, & poſtea ſequetur demonſtratio.

Concipiatur a puncto B periphæriæ A B C, moueri recta linea verſus A, cuius vnus terminus maneat fixus in puncto C, alter vero feratur per omnia puncta arcus B A motu æquabili: Similiter in eodem tempore eodemque motu æquabili per omnia puncta arcus B C, feratur linea recta parallela B D, & per quadrantem B D C vbicunque ſe interſecuerint iſtæ duæ lineæ, ducta ſit per interſectiones linea quædam curua, & hæc erit linea quæ vocatur Ciſſoides.

Quoniam igitur lineæ L C & H I, ſeſe interſecantes in puncto G lineæ Ciſſoidis B G C, feruntur in eodem tempore a puncto B, erunt arcus BH & BL æquales, ideoque arcus A L æqualis erit arcui H C; & angulus L C A æqualis angulo H A C, & triangulum G C I ſimile triangulo H A I: quare ſicut A I ad I H, ita C I ad I G; Sed ſicut A I ad I H, ita eſt I H ad I C; Ideoque A I, I H, I C & I G, ſunt quatuor lineæ continuè proportionales: Inuenta igitur eſt ratio quam habent iſtæ quatuor lineę proportionales ad inuicem quarum extremæ A I & I G, ſunt in eâdem ratione quâ ſunt F & K; ideoque duæ mediæ inter F & K datæ ſunt.

Neque omittendum eſt quòd non ſolùm in prædicto caſu opus eſt duabus mediis, verùm etiam in omni caſu quando conſtituendus fuerit aliquis Conus vel rectangulus, vel ſimilis cuicunque alteri Cono, æqua-

lis,

lis, vel in ratione datâ ad Conum datum; In præcedente verò caſu duæ mediæ continuè proportionales immediatè efficiunt problema, in alijs vero Caſibus, (quemadmodum, ſi præciperetur Cono dato A, facere Conum B æqualem, & ſimilem cuidam cono C, oportet primò inuenire rationem quam habet Conus datus A ad Conum C, & tunc in eâdem ratione reciprocâ fiat conus C ad conum ſimilem ſibi B) medium locum tenet Conus ille cui ſimilis conſtituendus eſt Conus, & oportebit inter terminos rationis Coni A, ad Conum C, inuenire duos medios continuè proportionales, vt habeatur Conus B in eâdem ratione ad Conum C, quam habet Conus A ad eundem. Si verò propoſitum fuerit cõſtituere Conum B ad Conum A in ratione E ad F, & ſimilem Cono C; tunc fiat ſicut Conus A ad Conum C, ita F ad D, & ſicut D ad E, ita Conus C ad alium ſui ſimilem hoc eſt cono quæſito B; vnde ratio Coni A ad conum B componitur ex ratione ipſius coni A ad conum C, & eiuſdem C ad conum B, vel ex ratione F ad D, & D ad E; ſed vt inueniatur Conus B ſimilis Cono C, hoc eſt, duo Coni ſimiles, in ratione D ad E, oportet vt inueniatur inter ipſas D & E, duæ mediæ continuè proportionales; Ideoque ſine ope duarum mediarum continuè proportionalium Problema non ſoluetur.

Ratio quare ſine ope duarũ mediarum fieri non poſſunt.

Quicquid hic de Conis iam dictũ eſt, idem de alijs ſolidis parallelepipedis intelligendum: & mihi ſatisfacere videtur quod ratio, quare non poſſint ſolui iſtiuſmodi Problemata, dependeat a ſimilitudine vel formâ

for-

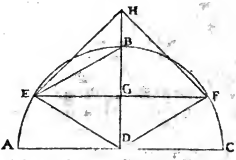
corporis vel ſolidi faciendi, quod pluribus exemplis infra confirmabitur.

Ex propoſitione 14. & eiuſdem Corollario conſtituitur Conus æqualis Portioni datæ, ſuper eâdem baſi cum Portione: Sed Cono dato non poſſumus conſtituere Portionem Sphæræ æqulaem ſuper eâdem baſi cum Cono conſiſtentem. Hinc quæritur ratio quare hoc fieri non poſſit. Inquiramus igitur quibus Solidis ſit Portio æqualis, & inueniemus per propoſitionem 60. quòd omnis Portio Sphæræ ſit æqualis tribus Conis ex eâdem baſi & dimidiâ altitudine eiuſdem, vnà cum Sphærâ, cuius diameter eſt æqualis altitudini ipſius Portionis, hoc eſt Cono ſuper eâdem baſi portionis conſtituto, vnà cum dimidio eiuſdem, & dimidio Coni Rectanguli eiuſdem altitudinis: Duplicatis igitur omnibus, duplum Portionis, (vel duplum Coni cui æqualis conſtituenda eſt Portio) æquale eſt tribus Conis ex eâdem baſi & altitudine cum portione, vnà cum Cono rectangulo eiuſdem altitudinis: Tribus autem his Conis æqualis eſt vnus Conus habens baſim triplam & eandem altitudinem, & duplo Cono dato æqualis eſt Conus qui habet baſim triplam, altitudinem verò ſubſeſquialteram. Videamus autem figuram Prop. 14. vt manifeſtior fiat demonſtratio.

Portionis reſolutio.

Quoniam inquam duplum Coni E H F, hoc eſt Conus ex triplâ baſi E F & altitudine ſubſeſquialterâ altitudinis G H, æqualis eſt tribus Conis ex eâdem baſi E F & altitudine G B, hoc eſt, Cono ex triplâ baſi E F & altitudine B G, vnà cum Cono rectangulo ex eâdem altitudine B G: Coni autem ſunt ad inuicem

Ff ſicut

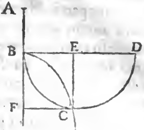


ſicut Parallelepipeda ex eiſdem baſibus & altitudinibus: Igitur Solidum ex triplo quadrato E G in duas tertias lineæ G H, æquale eſt ſolido ex triplo quadrato eiuſdem E G in G B, vnà cum Cubo ex G B, quare Cubus ex G B æqualis eſt ſolido ex quadrato E G in exceſſum lineæ ſubſeſquialteræ G H, ſupra lineam GB; & ideo exceſſus ille eſt quarta proportionalis, quarum radix tripli quadrati E G eſt prima, G B verò ſecunda. Data autem eſt radix tripli quadrati E G ſcilicet prima; data etiam eſt linea ſubſeſquialtera lineæ G H, quæ eſt aggregatum ſecundæ & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium; quæritur ſecunda, ſcilicet linea G B vt efficiatur Problema. Solidum autem eſt hoc Problema, vt ex datâ vnâ extremarum & aggregato ſecundæ & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium diſcernantur ſingulæ, nec per principia geometrica ſoluendum. Per Parabolicam vero Sectionem ſoluetur hoc modo.

Sint datæ A B vna extremarum & B D aggregatum ſecundæ & quartæ, quæ applicentur ſimul ad angulos rectos. Producatur iam A B quantum opus in F, &

factâ

factâ BF diametro Parabolæ & AB recto latere, deſcribatur linea parabolica BC: tum fiat BD diameter circuli, circa quam ſit ſemicirculus BCD, interſecans Parabolam in puncto C, a quo ordinatim applicentur lineæ CF ad diametrum parabolæ, & CE ad diametrum Circuli, ſecans BD datam in puncto E: Dico BE eſſe ſecundam quæſitam, ED vero quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium.



Cùm enim BE ſit æqualis FC, rectangulum ABF æquale eſt quadrato BE: Iterum cùm EC æqualis ſit BF, rectangulum BED æquale erit quadrato BF: Igitur AB, BE, BF, ED, ſunt quatuor lineæ continuè proportionales, quarum AB prima & BD aggregatum ſecundæ & quartæ ſunt datæ, linea vero BE altitudo Portionis quæſita, inuenta eſt.

Hinc etiam patet, quòd non ſolùm cum propoſitum eſt conſtruere aliquod Solidum, quod habeat ſimilitudinem vel formam alterius ſolidi dati, æquale, vel in ratione datâ ad aliud ſolidum, opus eſt duabus medijs continuè proportionalibus, verùm etiam in omni caſu, quando pars aliqua Solidi quæſiti, inuenta per reſolutionem eiuſdem Solidi, habet ſimilitudinem vel formam alicuius Solidi noti, non poſſit ſine ope alicuius loci ſolidi, vel Sectionis Conicæ geometricè ſolui; ſicut ex præmiſſis liquido apparet.

Iam opportunum videtur, vt ex datâ hac occaſione

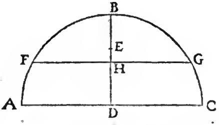
inquiramus de Segmentis, & inde exploremus in quæ Solida reſoluantur, & quomodo ad Hemiſphæria quorum ſunt partes in ratione datâ cõſtituenda ſint. Quoniam autem Hemiſphærium ſectum plano ad baſim parallelo componitur ex portione & ſegmento, videamus primò in quæ ſolida reſoluatur Segmentum, & poſtea quomodo in ratione datâ ad Hemiſphærium illud conſtituere poſſimus.

Inueniemus igitur primò quòd Segmentum æquale ſit tribus Conis ex minore ipſius baſi & eâdem altitudine, vnà cum exceſſu quodam, qui per Corollarium quintum Prop. 63. demonſtratur æqualis Hemiſphærio eiuſdem cum ſegmento altitudinis. Et per prop. 23. Segmentum ad baſim demonſtratur eſſe æquale tribus Conis eiuſdem cum ſegmento altitudinis, quorum duo ex baſi Hemiſphærij, reliquus ex baſi minori Segmenti. Quare ſi vtrobique deductus fuerit Conus ex minori baſi, remanebunt duo Coni ex baſi Hemiſphærij æquales duobus Conis ex baſi minori, vnà cum Hemiſphærio eiuſdem altitudinis; Hemiſphærium autem æquale eſt duobus Conis rectangulis eiuſdem altitudinis; Ideoque Conus ex baſi Hemiſphærij & altitudine ſegmenti, æqualis eſt Cono ex minori baſi vnà cum Cono rectangulo eiuſdem altitudinis cum ſegmento.

Sit igitur propoſitum ſecare Hemiſphærium plano ad baſim parallelo, ita vt Segmentum habeat rationem datam ad Hemiſphærium; Supponatur factum & quòd in Hemiſphærio ABC ſecto plano FG ad baſim AC parallelo, Segmentum AFGC habeat ad

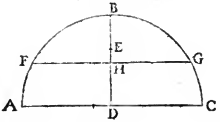
He-

Hemiſphærium ABC, rationem quam habet pars axis ED ad totum axem BD.



Cum autem duo Coni ex baſi Hemiſphærij AC & altitudine ED, ſint ad Hemiſphærium ABC ſicut linea ED ad lineam BD, ſegmentum vero AFGC ſupponatur ſe habere ad idem Hemiſphærium in eâdem ratione ED ad BD: Igitur duo Coni ex baſi AC & altitudine ED æquales ſunt ſegmento AFGC. Eidem vero Segmento æquales ſunt duo Coni ex eâdem baſi AC & altitudine DH vnâ cum Cono ſegmenti ex baſe FG & eâdem altitudine DH, Conus autem Segmenti ſcilicet ex baſi FG & altitudine DH, minor eſt Cono ex baſe AC & altitudine DH, quantitate Coni rectanguli ex DH: Coni autem cum ſint ad inuicem ſicut ſolida parallelepipeda, erit ſegmentum AFGC ad Hemiſphærium ABC, ſicut ſolidum ex triplo quadrato AD in DH minus Cubo DH ad ſolidum ex duplo quadrato AD in DB, vel duplum Cubi AD; Ideoque æquale eſt ſolido ex duplo quadrato AD in DE.

Cum igitur ſolidum ex triplo quadrato AD in DH



minus cubo D H; æquale ſit ſolido ex duplo eiuſdem quadrati A D in D E, erit reciprocando baſes & altitudines, ſolidum ex triplo quadrato A D in duas tertias quadrati E D, æquale ſolido ex eodem triplo quadrato & altitudine H D, deficiente cubo ex H D; Quare maior erit H D quam linea ſubſeſquialtera ipſius E D, & differentia inter H D & duas tertias E D erit quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, quarum latus tripli quadrati A D eſt prima, H D vero ſecunda; Et ideo cum linea ſubſeſquialtera E D datæ ſit aggregatum ſecundæ & quartæ quatuor continuè proportionalium, quarum latus tripli quadrati A D ſit prima, per lineam Parabolicam ſicut in proxima antecedente de Cono & portione demonſtrauimus, diſcernentur ſingulæ, & inuenietur linea H D, ſcilicet altitudo ſegmenti A F G C, quod habet ad Hemiſphærium A B C rationem E D ad B D.

Hinc iterum manifeſtum eſt quòd ſegmentum ad baſim, in cuius reſolutione inuenitur pars aliqua ſimilitudine vel formâ nota, vtpote Hemiſphærium

vel Conus Rectangulus, non poſſit conſtitui in ratione datâ ad Hemiſphærium ſine ope duarum mediarum continuè proportionalium vel ſectione Conicâ: Ad reſolutionem enim Problematum ſolidorum opus eſt medijs ſolidis vt reſoluantur.

Quoniam autem Hemiſphærium componitur ex Segmento & Portione, conſequens videtur vt iam inquiramus per quæ media poſſimus conſtituere Portionem in ratione datâ ad Hemiſphærium. Satis autem iam dixiſſe videmur de reſolutione ipſius, quando demonſtrauerimus quod aliqua pars ipſius erat æqualis Sphæræ eiuſdem cum Portione altitudinis.

Ratio portionis ad Hemiſ.

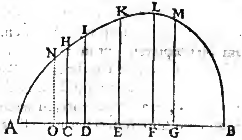
In propoſitione verò 32. demonſtratum eſt quòd Portio ſe habeat ad Hemiſphærium ſicut exceſſus, quo triplus axis eius ſuperat tres deinceps proportionales, in ratione axis Hemiſphærij ad axem Segmenti, ad duplum axem Hemiſphærij: Et in 30. ſicut rectangulum quoddam ex altitudine Coni æqualis Portioni in altitudinem portionis, ad rectangulum ex compoſitâ ex axe Coni prædicti & axe ſegmenti, in axem Hemiſphærij. Quoniam autem neceſſarium eſt vt vtraque in eandem rationem conueniat, licet per diuerſas methodos progrediantur, melius duxi vt per methodum Prop. 32. Problematis reſolutionem inquiram.

Sed primò licebit hic declarare qualis ſit huius propoſitionis reſolutio, & in quam effectionem geometricam cadat, vt lineam quandam Cubatricem, huic negotio propriam, & ad multas alias propoſitiones ſolidas ſoluendas accommodam, deſignem. Poſtea vero aliquas propoſitiones adiungam, quæ non ſolùm

huic

huic negotio, verum etiam ad multas in Algebrâ propoſitiones ſoluendas attexui.

Qui igitur per Algebram experiri velit, quænam ſit reſolutio prop. 32. inueniet, quòd ad datam lineam (ſcilicet quæ tripla ſit radij baſis Hemiſphærij) applicandum ſit quadratum faciens ſolidum æquale Cubo dato deficiens Cubo. Ideoque linea data erit aggregatum extremarum ex quatuor lineis in ſerie continuè proportionalibus, mediarum vero minor eſt latus cubi dati. Ex dato igitur extremarum aggregato, & vnâ mediarum, quærantor ſingulæ proportionalium. Veruntamen oportebit vti medijs ſolidis ad hæc demonſtranda, aliter enim demonſtrari non poterunt.

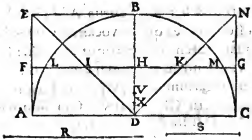


Exponatur itaque linea Cubatrix & fabrica ipſius, vt per illam inueniamus ſolutionem huius problematis. Sit itaque linea recta A B, in quâ ſumantur quotuis puncta C, D, E, F, G, & ſuper ſingulis eorum erigantur perpendiculares C H, D I, E K, F L, G M: Fiat autem Cubus ex lineâ C H æqualis ſolido ex quadrato A C in lineam G B: Similiter cubus ex linea D I æqualis ſit ſolido ex quadrato A D in D B, & ſic

in cœteris omnibus; vnde ſi æquabili manus ductu connectantur, & fiat linea curua A H I K L M B, erit linea illa ſic facta, ea quam vocamus Cubatricem.

Priuſquam autem aggrediamur Propoſiti ſolutionẽ opus eſt vt oſtendamus quod ſi linea A B ſecta fuerit in quacunque ratione datá, vtpote in ratione A C ad C B, & facta fuerit GB æqualis A C, ſolidum ex quadrato A C in C B lineam, hoc eſt Cubus ex C H, erit ad Cubum ex M G, vel ſolidum ex quadrato A G in G B, ſicut linea A C ad lineam C B. Cum enim ſolida habeant ad inuicem rationem compoſitam ex baſibus & altitudinibus, erunt iſta ſolida ad inuicem cõpoſita ex duplâ ratione A C ad C B (nam C B & A G ſunt æquales) & ſimplâ ratione C B ad A C; ideoque deductâ ſimplâ ratione CB ad AC ex duplâ AC ad C B, quæ remanet erit A C ad C B. Et propterea Cubus ex H C ad Cubum ex M G, erit ſicut linea A C ad lineam C B.

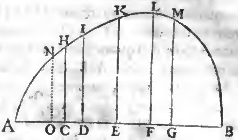
Iam vero vt demonſtremus ſectionem Hemiſphærij in ratione datâ ſecundum methodum Prop 32. repetamus Figuram ipſius. Et propoſitum ſit Secare Hemiſphærium A B C plano ad baſim parallelo, ita vt Portio diſſecta L B M ſit ad Hemiſphærium A B C ſicut linea S ad duplum BD, vel lineam A C: Et quoniam demonſtratum eſt quód Portio ſe habeat ad Hemiſphærium; ſicut exceſſus triplæ B H ſupra tres proportionales, ſcilicet lineam B X, ad duplum axis Hemiſphærij; Oportet quod linea S ſit æqualis exceſſui quo tripla B H ſuperat tres illas proportionales, vel lineam B X. Iterum, cum per Analyticam æquatio-



nem inueniatur (hoc autem infra Geometricè demonſtrabimus) quòd Solidum ex quadrato A D in lineam S, æquale ſit ſolido ex triplâ lineâ A D vel B D in quadratum B H, minus cubo ex B H, Neceſſarium erit vt ſolidum illud ex triplâ B D in quadratum B H, minus Cubo ex B H, ſit ad ſolidum ex quadrato B D in duplum B D, ſicut S linea ad duplam B D, vel ſicut Portio ad Hemiſphærium. Fiat igitur linea R ſecunda in ſerie quatuor continuè proportionalium, quarum B D prima, A C vero quarta; & erit Cubus ex R, æqualis ſolido ex quadrato B D in duplam B D vel A C; Ideoque Solidum ex quadrato B D in S, vel ei æquale, ſcilicet ſolidum ex triplâ B D in quadratum B H minus cubo B H, erit ad Cubum ex R, ſicut linea S ad duplam B D.

Supponatur iam linea A B quæ baſis eſt lineæ Cubatricis ita diuidi in puncto C, vt ſit A C ad C B ratio data, hoc eſt ſicut S ad duplam B D, & fieri etiam G B æqualis A C, & a punctis C, & G, erectæ perpendiculares C H & G M ad peripheriam ipſius lineæ

Cu-



Cubatricis; Manifeſtum eſt iam ex ſupra demonſtratis quod Cubus CH ad cubum ex GM habeat eandem rationem AC ad CB.

Duo Cubi in ratione data ad inuicem.

Rurſus in baſe lineæ Cubatricis fiat AD æqualis FB, & erigatur perpendicularis DI, ex quâ Cubus erit æqualis ſolido ex quadrato AD in DB, cuius altitudo eſt dupla lateris baſis ipſius, ideoque ſimili ſolido ex quadrato axis Hemiſphærij in duplam altitudinem eiuſdem; tum tota linea AB tripla partis AD.

Iam concipiatur linea AB diuidi a puncto C, ita vt ſit AC ad CB ratio in quâ propoſitum eſt ſecare Hemiſphærium, & fieri ſicut MG ad HC, ita ID ad NO; quæ ordinatim applicetur lineæ AB inter A & D. Dico ſi fiat in axe hemiſphærij BD ad BH, ſicut in Cubatrice AD ad AO, quod planum ſecans Hemiſphærium per punctum H ad baſim parallelum, diſſecabit Portionem LBM in ratione datâ ad hemiſphærium, ſicut linea S ad duplum axis eiuſdem.

Quoniam enim factum eſt ſicut MG ad HC, ita ID ad NO, erit permutando, Cubus ex NO ad Cubum ex ID, ſicut Cubus ex HC ad Cubum ex MG,

tione datâ, dummodo fuerint eiuſdem cum Sphæra altitudinis: Sed negatur nobis, ſine ope mediorum ſolidorum,conſtituere portionem ad Sphęram datam in ratione datâ; & in aliâ altitudine datâ, niſi forſan nota fuerit ratio ſphærarum ad inuicem ſub diuerſis illis altitudinibus conſiſtentium; & in illo caſu problema ſoluendum eſt.

Iterum in 73. licebit in quâcunque altitudine minore conſtituere Portionem æqualem Sphæræ datæ: Atqui non licebit conſtituere portionem æqualem Sphæræ datæ quæ ſimilis ſit alteri portioni datæ, ob eaſdem cauſas præmiſſas.

De Portionum & Segmentorum ad baſim reſolutione & Ratione ad Hemiſphærium, mihi iam videtur ſatisfeciſſe quantum opus, ſolùm igitur reſtat vt aliquid dicam de Segmento Intermedio, de quo, quoniam ad Hemiſphærium in ratione datâ conſtitui poteſt manifeſtum eſt quod in Reſolutione ipſius non interſit aliquod Solidum ſpecie vel formâ notum: quæ res manifeſtior fiet ſi conſideremus quòd ſit vel pars Portionis diſſecta plano ad baſim parallelo, vel pars Segmenti ad baſim ſimiliter diſſecta: Vtraque verò illorum an ſit non multum refert; Si enim ſit pars ſegmenti ad baſim, reſolutio ipſius erit in Cylindrum vel triplum Coni ſuper minori baſi & eâdem altitudine, vnà cum portione Sphæræ ſpeciei incognitæ; eſt enim maior vel minor ſecundum quātitatem ſegmenti quæ diſſecatur. Si vero vt partem Portionis illud conſideres, tunc magis ignotæ erunt partes ipſius; vtpote vel ex truncis Conorum, vel ex portione quadam Sphæ- Segmentum intermedium.

roi-

& DHC. Quare cùm triangulum DFC ſit æquale triangulo EIC, addito vtrique trilineo mixto EDK, & dempto communi triangulo KIC, remanet Sector EDC æqualis quadrilineo vel ſegmento intermedio EDFI: quare eandem rationem habet ſegmentum intermedium EDFI ad totum quadrantem ABC, quam habet ſector ECD ad eundem, vel arcus ED ad totum arcum AB: Vnde in Semicirculo (cùm omnia ſint dupla) ſegmentum intermedium erit ad ſemicirculum ſicut duplum arcus ED ad totam peripheriam ſemicirculi: & quemadmodum in Hemiſphærio ſunt duo Coni æquales, quorum baſes ſunt baſes ſegmenti intermedij, ita in ſemicirculo ſunt duo triangula æqualia quorum baſes ſunt latera ipſius ſegmenti Intermedij. Coroll. propo. 26. huius.

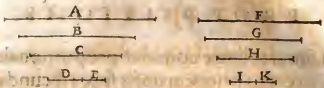
METHODVS
GEOMETRICA
Pro Calculo, & Reſolutione ad Aequationem Propoſitionis triceſimæ ſecundæ.

PROPOSITIO I.

Si ſint quotcunque lineæ continue prôportionales, & totidem aliæ in eâdem ratione, erit ſicut priorum maior ad differentias earum vel ad quâlibet earum differentiam, ita maior poſteriorum ad differentias pôſteriorum, vel ad quamlibet earum differentiam viciſſim ſumptam: Similiter & media vel minimam ad quamlibet differentiam viciſſim ſumptam.

SInt enim tres lineæ continuè proportionales A, B, & C, quarum maxima A excedit B mediam quantitate D; B vero media excedit C minimam quantitate E; eſt igitur linea DE aggregatum exceſſuum vel differentiarum A ſupra B, & B ſupra C:

Sint

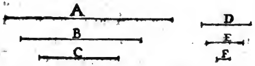


Sint etiam tres aliæ F, G, & H in eâdem ratione quâ priores, quarum exceſſus ſint I, maioris F ſupra mediam G, & K, exceſſus mediæ G ſupra minorem H; & ideo I K aggregatum exceſſuum vel differentiarum earum: Dico quòd ſicut A maior priorum ad D exceſſum A ſupra B, ita F maior poſteriorum ad I exceſſum F ſupra G; & ſicut A ad E, ita F ad K; & ſic de reliquis viciſſim ſumptis.

Quoniam enim linea A compoſita eſt ex B & D, linea B etiam ex C & E, erit diuidendo, ſicut B ad D, ita C ad E, & ex æquali (cum ſint proportionales A, B, & C) ſicut A ad D, ita B ad E. Simili modo demonſtrabitur in poſterioribus quòd ſicut F ad I, ita G ad K; & cum ſint in eâdem ratione A, B, & C, quâ ſunt F, G, & H, erit ſicut A ad D, ita F ad I, &c. Sed cum ſit ſicut A ad D ita B ad E, erit permutando ſicut A ad B, ſic D ad E, & I ad K in eâdem ratione; Et ex æquali erit ſicut A ad aggregatum ex D & E, ita F, ad aggregatum ex I & K. Similiter etiam demonſtrabitur de reliquis viciſſim ſumptis, ſicut in propoſitione enunciatur.

PROPOSITIO II.

Si ſint tres lineæ continuè proportionales, exceſſus primæ maioris ſupra ſecundam erit media proportionalis inter primam maiorem, & differentiam illius exceſſus quo maior exceſſus minorem ſuperat.



Sint tres lineæ continuè proportionales A, B, & C, & ſit D, exceſſus A ſupra B, & E exceſſus B ſupra C; F, vero ſit differentia exceſſuum, vel exceſſus quo linea D, ſuperat lineam E: Dico D, eſſe mediam proportionalem inter A & F: Cum enim ſit ſicut A ad B ita D ad E, erit ſicut A, ad exceſſum ſuum ſupra B, ita D ad exceſſum ſuum ſupra E, ſcilicet ad F; D vero eſt exceſſus A ſupra B. Igitur ſicut A ad D, ita D ad F. Quod erat propoſitum.

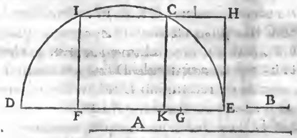
COROLLARIVM.

Trium igitur Proportionalium datâ maiore extremâ & differentiâ exceſſuum earum, inueniuntur reli-

quæ. Inter datam enim A maiorem extremam & F differentiam exceſſuum inueniatur media proportionalis D, quæ ex A ſubtrahatur, & inuenta eſt B media proportionalis, ſicut A, ad B, ita B, ad C tertiam proportionalem.

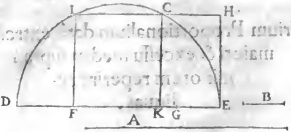
PROPOSITIO III.

Trium Proportionalium datâ extremâ maiori & exceſſu mediæ ſupra minorem reperire reliquas.



SIT A maxima trium proportionalium, & B exceſſus quo ſecunda excedit tertiam: Deſcribatur igitur ſemicirculus DIE ſuper diametro DE, quæ æqualis fiat lineæ datæ A, & ab eâ abſcindatur pars EG æqualis datæ B, oportet autem quod B vel EG non ſit maior quam quarta pars ipſius A, vel DE, vt poſtea patebit: Erigatur iam a puncto E perpendicu-

laris, a quâ abſcindatur pars E H, quæ ſit media proportionalis inter D E & E G, & ab H, puncto ducatur parallela diametro D E, quæ ſecabit vel ſaltem tanget peripheriam circuli D I E; & ſi ſecuerit eam, ſecabit in duobus punctis: Secet igitur peripheriam in punctis C & I, a quibus ad Diametrum D E, demittantur perpendiculares C K & I F. Quoniam igitur lineæ C K æqualis eſt linea H E, erunt & quadrata earum etiam æqualia; factum eſt autem quadratum ex H E, æquale rectangulo D E G, quadratum vero C K æquale eſt rectangulo D K E; rectangulum igitur D K E æquale eſt rectangulo D E G; & ideo ſicut D E ad D K, ita K E ad E G; vnde per conuerſionem rationis erit ſicut D E ad E K, ita E K ad K G. Inuentæ ſunt igitur tres lineæ proportionales, quarum D E prima æqualis A datæ, E K ſecunda & K G tertia, quarum differentia vel exceſſus G E æqualis eſt B datæ.



Similiter etiam demonſtrabitur quòd ſint aliæ tres proportionales quarum D E maxima, & exceſſus mediæ ſupra minorem ſit ipſa G E data. Quoniam enim

rectangulum DFE æquale eſt rectangulo DEG, erit ſicut DE, ad DF, ita FE ad EG, & per conuerſionem rationis ſicut DE ad EF, ita EF ad FG; eſt igitur DE prima maior data, EF media, & FG tertia proportionalis, & exceſſus FE ſuper FG eſt linea GE data.

Sed dixi quod oporteat B vel EG non maiorem eſſe quartâ parte lineæ A vel DE. Cum enim neceſſe ſit rectangulum ex ſegmentis lineæ DE æquale eſſe rectangulo DEG; maximum autem rectangulum quod fit ex ſegmentis cuiuſuis lineæ ſit illud quod ex dimidijs fit ſcilicet quod æquale eſt quadrato ex dimidiâ, & huic æquale ſit rectangulum ex totâ DE in quartam partem eiuſdem DE: Oportet igitur quod GE (quæ eſt differentia exceſſus mediæ ſupra minorem) non ſit maior quartâ parte totius.

Quales autem ſint hæ duæ ſeries proportionalium, quæ hic ſe præbent ſpeculandas, quarum eadem eſt maxima, eademque differentia inter reliquas proportionales (duæ enim ſe præbent, & non plures) iam patefacere tentabimus.

Videamus igitur in numeris quomodo ſe habeant; & ponatur primo GE quarta pars lineæ DE, quæ (vti iam demonſtrauimus) eſt maxima proportio quam habere poteſt GE ad lineam DE, & in hoc caſu ſolùm erit vna ſeries proportionalium; media enim proportionalis inter GE & DE erit dimidia diametri DE, & ideo linea HCI, tanget ſemicirculum in eius polo, ex quo ſi dimittatur perpendicularis, cadet in centrū; & ſic KG æqualis erit EG, & tres proportionales erunt

4. 2. & 1. ſcilicet quadratum, radix, & vnitas.

Series illa proportionaliũ maioris inæqualitatis eſt quadrati radicis æternitatis.

Sed ponatur iam G E ad D E in minori ratione; ſcilicet ſicut 2. ad 9. erit igitur K E, 3. quarum K G, 1. tres igitur proportionales D E, K E, & K G, quæ ſunt maioris inæqualitatis erunt 9. 3. & 1. hoc eſt quadratum, radix, & vnitas: reliquæ vero proportionales ſcilicet D E, F E, & F G, quarum eadem eſt prima, & eadem eſt differentia reliquarum erunt 9. 6. & 4. quæ in numeris ſunt minimæ in ratione K E, ad E G & ab Euclide K E & E G vocantur Termini, ſiue radices Proportionis, quoniam in eâdem ratione minores ſumi nequeunt.

Def. 25. lib. 7. Euclid.

Iterum ponatur G E, 3. quarum D E, 16. & erit K E 4. & K G 1. reliqua vero ſeries proportionalium erit 16. 12. & 9. quæ ſunt etiam minimæ in ratione K E, ad G E, 4. ad 3. Et in omnibus apparet quod K G habeat rationem vnitatis, K E radicis, & D E quadrati. Manifeſtum eſt etiam quod ſicut K E eſt radix quadrati maioris D E, ita erit G E (differentia data) radix quadrati F G minoris.

II. Apparet etiam quod ratio dupla, hoc eſt 4. 2. & 1. eſt media inter omnes rationes; ſicut manifeſtum eſt in rationibus 3. ad 1. & 3. ad 2. inter quas 3. ad 1. $\frac{1}{2}$ (hoc eſt dupla ratio) media eſt, & ſic in omnibus alijs quæ eandem primam maiorem & eandem differentiam reliquarum habent.

III. Hoc intelligitur de illa ſerie proportionaliũ quæ ſunt maioris inæqualitatis.

Hic etiam obſeruandum eſt, quòd, (ſicut in ſecundâ harum demonſtrauimus) exceſſus primæ ſupra ſecundam eſt media proportionalis inter primam & differentiam exceſſuum, ita ex demonſtratione huius ap-

paret

Digitized by Google

paret quòd exceſſus ille ſit radix maioris datæ, & quod differentia exceſſuum ſit vnitas.

PROPOSITIO IV.

Trium proportionalium datâ extremâ minore & exceſſu quo maxima excedit mediam inuenire reliquas.

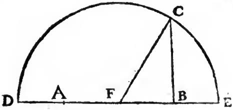


REpetitâ diametro DE in figurâ præcedentis propoſitionis diuisâ in Punctis F, K, & G, concipiatur data FG minor extrema, & DF exceſſus primæ maioris ſupra mediam, quibus in directum poſitis, producatur linea DG in E, vt ſit rectangulum FEG, æquale rectangulo DFG dato; hoc autem quomodo fiet in ſequente lemmate oſtendemus. Quoniam igitur rectangulum DFG æquale eſt rectangulo FEG, erit ſicut DF ad FE, ita EG ad GF, & componendo ſicut DE ad EF, ita EF, ad FG: eſt igitur EF media proportionalis inter DE & FG, & differentia inter DE & EF eſt linea DF data.

Si vero data fuerit KG minor in reliqua ſerie proportionalium, & DK differentia inter maiorem extremam & mediam, fiat ſicut prius & inuenta erit KE media proportionalis, æqualis DF, quæ erat exceſſus maioris ſupra mediam in ſerie priorum proportionalium.

LEMMA.

Datâ differentia laterum rectanguli, & mediâ proportionali inter latera inuenire rectangulum.



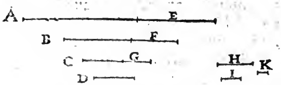
SIt data AB differentia laterum; tum BC media proportionalis inter latera quæſita, quibus in angulum rectum compoſitis, diuidatur AB bifariam in F, a quo ad C ducatur linea FC; facto iam centro F, & interuallo FC deſcribatur ſemicirculus DCE, ad puncta D & E, lineæ AB in vtramque partem productæ. Quoniam igitur DF, & FE ſunt æquales; ſunt etiam AF & FB; erit DB æqualis AE, & ideo deductâ AB communi, reliquæ DA & BE æquales erunt; vnde exceſſus lineæ DB, ſupra BE, eſt linea AB data; rectangulum vero DBE æquale eſt quadrato CB; Igitur ex datâ CB mediâ proportionali inueniuntur latera DB, & BE, quarum differentia eſt linea AB data, quod erat faciendum.

PRO-

Digitized by Google

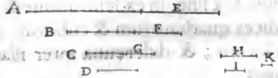
PROPOSITIO V.

Si fuerint quatuor lineæ continue proportionales, in minori quam duplâ ratione, extremæ earum ſunt Cubi; & ſi ex maioribus ordinatim deductæ fuerint minores, erunt tres exceſſus earum etiam proportionales in eâdem ratione quã priores, & earum extremæ, quadrata; & ſi iterum ex maioribus ordinatim deductæ fuerint minores, reliquæ earum erunt duæ lineę in eâdem ratione & ſunt radices quadratorum & cuborum prædictorum; & differentia inter illas eſt vnitas.



SInt enim quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, & ſint minoris inæqualitatis quam duplæ ex quibus ordinatim diſſectæ ſint partes E, F, & G, ſcilicet quòd pars E ſit exceſſus lineæ A ſupra li-

neam B; F exceſſus lineæ B ſupra lineam C, & G exceſſus C ſupra D. Sint iterum H exceſſus E ſupra F, & I exceſſus F ſupra G; Demum ſit K differentia inter H & I. Iam demonſtrauimus quod E, F, & G, ſimiliter & H ad I, ſint proportionales in eâdem ratione quâ A, B, & C: Nunc verò propoſitum eſt demonſtrare quòd A, E, H & K, ſint etiam proportionales maioris inæqualitatis quã duplæ, & quod A ſit Cubus, cuius quadratum eſt linea E, & radix linea H, & K vnitas, quæ eſt differentia inter lineas H, & I; Similiter quòd D ſit cubus, G quadratum, & I eorum radix; vnde ſequitur etiam quòd ſint proportionales D, G, I & K.



Per 1. harum.

Cum enim demonſtratum ſit quod ſicut B ad E, ita ſit F ad H; & ſicut C ad F, ita G ad I; ſed ſicut C ad F, ita eſt D ad G; Eſt igitur ſicut D ad G, ita G ad I: Cum etiam ſit ſicut G ad F, ita I ad H, erit ſicut G ad differentiam inter G & F, ſic I ad differentiam inter I & H; Sed I eſt differentia inter F & G, & K differentia inter I, & H; erit igitur ſicut G ad I, ita I ad K, & ideo D, G, I, & K continuè proportionales.

Per 2. harum.

Demonſtrauimus etiam quòd A, E, & H ſint con-

tinuè

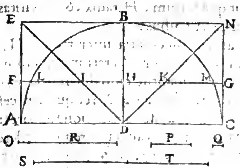
tinuè proportionales, & eâdem ratione E, H, & K ſunt proportionales; & ideo quatuor lineæ A, E, H, K, in ratione continuâ.

Iterum ex Corollario ad tertiam præcedentium propoſitionum, apparet, quod cum ſint duæ ſeries proportionalium, quarum eadem eſt maior & eadem differentia inter reliquas, vnà (ſcilicet ea cuius proportionales ſunt maioris inæqualitatis) compoſita eſt ex quadrato, radice & vnitate, cui ſi addatur quarta proportionalis maior, illa erit Cubus: vnde ſequitur quòd cum E ſit quadratum, H radix, & K vnitas, neceſſario ſit linea A Cubus.

Quod autem differentia inter radices H, & I, ſit vnitas ſic monſtrabitur: In rationibus enim quæ in numeris denominantur cum differentiâ vnitatis, ſicut in 4. ad 3. vel 5. ad 4. & reliquis, neceſſario ſequitur, ex ipsâ enim denominatione apparet: Si vero denominationem habeant cum maiori differentiâ, veluti ſicut 5 ad 3. & 13. ad 9. (quæ etiam reducuntur ad proportiones cum differentiâ vnitatis, ſicut ad 2. $\frac{1}{2}$ ad 1. $\frac{1}{2}$ & 3. $\frac{1}{4}$ ad 2. $\frac{1}{4}$) nihil præbent difficultatis niſi quòd in numeris ſint fractæ. In lineis vero quæ ſunt quantitates continuæ, nulla eſt difficultas, ſed eadem ſemper ratio quæ in reliquis.

His ita præparatis, videamus quid colligi poſſit ex propoſitione 32. circa Proportionem Portionis ad Hemiſphærium, & poſtea quomodo inſtitui poſſit calculus, vt inde exploremus, an, ſeruatis geometriæ legibus, demonſtrari poterit illud Problema Archimedis, Sphæram datam in ratione datâ ſecare.

Demonſtratum eſt enim per 31. quòd exceſſus Cylindri ſupra Conum rectangulum æqualis ſit Hemiſphærio, ac etiam quòd ſingulæ partes ſingulis partibus inter eadem plana interceptæ ſint etiam æquales, vnde per comparationem Coni qui per interſectionem factus eſt, ad Conum rectangulum, aſſequimur etiam proportionem exceſsûs Cylindri diſſecti eodem plano ad totum exceſſum Cylindri ſupra Conum rectangulum: quæ proportio eadem eſt quam habet Portio ad Hemiſphærium: Sunt enim æquales.



Sit igitur Hemiſphærium A B C, centrum D, axis B D, & Cylindrus E C, circa eundem axem & ſuper eâdem baſi; & in eo inſcriptus ſit Conus rectangulus E D N; ſecentur omnia plano F G baſi A C parallelo, ſecante Hemiſphærium in L & M, Conum vero rectangulum in I & K, & axem eorum communem in H puncto. Quoniam igitur Coni E D N, & I D K ſunt ſimiles, erit Conus E D N ad Conum I D K in triplicatâ ratione axis B D ad axem H D; Sit igitur lineis B D & H D, æquales O & P, & ſit O ad Q

tripli-

triplicata ratio eius quam habet ad P: Conus igitur E D N ſe habet ad Conum I D K, ſicut linea O ad lineam Q; Deductâ iam ex O parte æquali lineæ Q, reliqua R erit ad totam O, ſicut truncus Coni EIKN ad Conum E D N: Fiat etiam linea S æqualis triplo exceſſui O ſupra P, vel triplæ B H, ex quâ deductâ parte æquali lineæ R, reliqua T erit ad totam S, ſicut exceſſus Cylindri E G ſupra truncum Coni EIKN hoc eſt ſicut Portio L B M, ad Cylindrum E G; Sed Cylindrus E G, eſt ad Conum E D N, ſicut tripla B H ad BD, hoc eſt ſicut linea S ad lineam O, ex æquali erit ſicut T ad O, ita portio L B M ad Conum E D N: Sed Conus E D N, eſt medietas Hemiſphærij A B C, erit itaque ſicut T ad duplam O, ita Portio L B M ad Hemiſphærium A B C: vnde ſequitur quòd, datâ ratione in quâ ſecatur axis Hemiſphærij, detur etiam ratio portionis ad Hemiſphærium. Sed videamus vlterius, quænam ſit linea R, & ex quibus componatur.



Sint igitur quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, quarum A maior ſit æqualis axi Hemiſphærij BD, & ſecunda B, æqualis DH, reliqua C, & D, in ordine proportionales; Iam ex A reſecetur pars æqualis B, & exceſſus notetur E; Iterum ex parte quæ æqualis eſt B, reſecetur pars æqualis C, & reſidua ſit F; demum ex reliquâ quæ æqualis eſt C,

tolla-

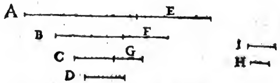
tollatur pars æqualis D, & reſidua erit G; Igitur E, F, & G, erunt exceſſus proportionalium A ſupra B, B ſupra C, & C ſupra D, & ſimul ſumptæ æquales lineæ R præcedentis figuræ; & quæ relicta eſt lineæ A, æqualis eſt Q quartæ proportionali. Cum igitur linea R, ſit aggregatum trium linearum proportionalium in ratione A ad B, vel BD ad HD, linea vero S, ſit æqualis triplæ maiori, (facta eſt enim æqualis triplæ BH vel triplæ E) erit pars T exceſſus triplæ maioris ſupra tres proportionales; Sed demonſtratum eſt quòd Portio LBM, ſe habeat ad Hemiſphærium ABC, ſicut T ad duplam O; Portio itaque ſe habet ad Hemiſphærium ſicut exceſſus triplæ maioris ſupra tres proportionales ad duplam maioris quatuor proportionalium, quarum illæ tres prædictæ erant exceſſus. Vnde.

COROLLARIVM.

Si ſint quatuor lineæ continue proportionales quarum maxima data ſit; data etiam ſit differentia inter duos exceſſus minores; Rectangulum ex datâ maiori in differentiam datam æquale erit rectangulo ex duobus exceſſibus maioribus.

SInt enim quatuor lineæ continuè proportionales A, B, C, & D, quarum exceſſus ſint E, F, & G,

& ideo in eâdem ratione quâ ſunt quatuor priores; & ſit linea I exceſſus E ſupra F, H verò differentia inter F & G duos exceſſus minores; Dico quòd rectangulum ex A in H, æquale ſit rectangulo ex E, in F, duobus exceſſibus maioribus. Cum enim demonſtratum ſit, quòd ſicut A ad B, ita ſit F ad G; per conuerſionem rationis erit ſicut A ad exceſſum A ſu-



pra B ſcilicet ad E, ita F ad exceſſum F ſupra G, hoc eſt ad H, & ideo rectangulum ex E in F, æquale erit rectangulo ex A in H, quod erat.

Sequitur etiam quod rectangulum ex A in I æquale ſit quadrato E; Ideoque quod rectangulum ex A in compoſitam ex I & H, ſit æquale quadrato E vnà cum rectangulo ex E in F, vel rectangulo ex compoſitâ ex E & F in E. II.

Demonſtratio Aequationis Analiticæ Propoſitionis 32. ex præcedentibus.

Quoniam enim demonſtratum eſt propoſitione 2. harum quòd quadratum E æquale ſit rectangulo ex A in exceſſum E ſupra F, ſcilicet li-

neam

neam I, & iam demonſtrauimus quòd rectangulum ex E in F æquale ſit rectangulo ex A in H; Si igitur ſumatur exceſſus triplæ E, ſupra E, F, & G, hoc eſt linea I bis, cum lineâ H ſemel (quæ ſimul ſumpta ad duplam A, habent rationem quam habet portio ad Hemiſphærium) & ex illis fiat rectangulum in A, erit illud æquale duobus quadratis ex E, vnâ cum rectangulo ex E in F, vel quod idem eſt tribus quadratis ex E, minus rectangulo ex E in I: Sed iam oſtenſum eſt quòd linea I (dum ſint A, E, & I in maiori quam duplâ ratione vel ſaltem in duplâ) ſit radix cubica lineæ A, & quòd linea E quæ media eſt proportionalis inter A & I ſit quadratum, vnde ex applicatione vel multiplicatione E in I, factus eſt Cubus cuius latus lineà I: æquale igitur eſt rectangulum ex A in exceſſum triplæ E ſupra E, F, & G, tribus quadratis ex E, minus Cubo ex I: Quoniam verò æquatio iſta excedit rationem planorum (vt apparet ex prædictis) videamus quomodo, ſeruatis proportionibus, fieri poſſint ſolida; vt inde exploremus quomodo ſoluendum ſit Problema.

Rectangulum igitur ex E, in I, ad quadratum E, eſt ſicut linea I ad lineam E; eandem etiam rationem habet cubus ex I ad ſolidum ex E in quadratum I. Sed ſicut I ad E, ita E ad A.

Igitur Cubus ex E ad ſolidum ex A in quadratum E, eandem rationem habet, quàm I ad E. Iterum rectangulum ex A in exceſſus prædictos æquale eſt triplo quadrato ex E, minus rectangulo ex A in I, Applicato igitur vtrobique latere A, vt fiant ſoli-

Digitized by Google

da, erit ſolidum ex quadrato A in exceſſus prædictas æquale ſolido ex triplo A in A in I, minus ſolido ex A in E in I. Sed rectangulum ex A in I, æquale eſt quadrato E; & ſolidum ex A in E in I, cum ſint proportionales æquale eſt Cubo ex E. Solidum igitur ex quadrato A in exceſſus prædictos æquale eſt ſolido ex triplo A in quadratum E, minus cubo ex E. Cùm igitur ex applicatione lateris A, non mutetur ratio, & appareat ex demonſtratis, quòd exceſſus Cubi E ſupra ſolidum ex triplo A in quadratum E, ſit in eâdem ratione quâ rectangulum ex E in I ad triplum quadratum E; manifeſtum eſſe debet quòd recta ſit æquatio. Data autem eſt linea A, ſcilicet axis Hemiſphærij ſecandi in ratione datâ; dantur etiam exceſſus prædicti, ſcilicet qui habent rationem ad duplum axem eandem, quæ data eſt, in quâ debeat ſecari Hemiſphærium; Igitur & ſolidum ex quadrato A in exceſſus prædictos datur. Datum eſt etiam triplum A; quærendum eſt igitur quadratum E, ex cuius applicatione ad triplum A, proueniet ſolidum æquale ſolido dato excedens cubo. Inuento igitur latere E, ſecetur axis Hemiſphærij plano baſi parallelo, ita vt pars ſuperior axis æqualis ſit lineæ E, & in Hemiſphærium ſecabitur in ratione datâ, ſcilicet, ſicut exceſſus prædicti ad duplum axem vel diametrum Hemiſphærij. Hoc autem non poteſt fieri ſine ope alicuius loci Solidi; veluti per lineam Cubatricem, ſupra expoſitam, aut per compoſitionem duarum ſimul Sectionum Conicarum; quemadmodum ab Eutocio in Commētarij in Archimedem de Sphærâ & Cylindro duobus Per prop. 32.

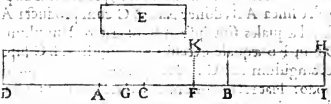
modis pulcherrimis relatum inuenio: quorum prior inuentioni Dionyſodori refertur, per compoſitionem Parabolæ cum Hyperbolâ: alter vero Diocli attribuitur, & fit per compoſitionem Hyperbolæ cum Ellipſi: Vterque pulcherrimus & difficillimus; ex quo videre licet quantum ſudarint veteres Geometræ circa reſolutionem huius pulcherrimi Problematis. Neque idcirco inſcitiæ arguendi ſunt hi, propterea quòd non effecerint illud, quod tentarunt, ſed inſolentiæ potius, quòd tentauerint illud quod Archimedes infectum reliquit. Hoc me deterruit primùm, & nunquam hunc campum luſtraſſem, niſi a fratre meo cariſſimo, nihil imperuium exiſtimãte,& cuius ope & ingenio acutiſſimo fretus primùm hoc incepi, & eodem inſtigante tandem huc perduxi. Præcipuum autem inſtitutum mihi fuit, Veritates nouas in lucem proferre & in his quæ rationibus planorum non ſubijciuntur, demonſtrare, quare ita ſint, & quâ ratione eorum inueſtiganda ſit Reſolutio, cui negotio quantum ſatisfecerim aliorum eſto Iudicium.

APPEN-

APPENDIX
DE CONO SCALENO.

PROPOSITIO I.

Si recta linea ſecta fuerit vtcunque, inuenire in aliquo ipſius ſegmento Punctum, inter quod, & vtrumque terminum lineæ datæ, & punctum ſectionis tres lineæ interceptæ conſtituant maximum Solidum quod fieri poſſit ex quibuſlibet rectis a tribus prædictis punctis ad aliquod in eodem ſegmento punctum, ductis.

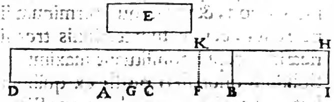


SIT linea data A B diuiſa vtcunque in puncto C, & concipiatur factum, & quòd punctum F in maiori ſegmento C B, ſit punctum quæſitum, a quo tres lineæ a punctis A, C, & B ductæ, videlicet A F, C F, & B F faciant Maximum Solidum quod fieri poteſt a quibuſſibet lineis a punctis A, B, & C ad aliquod

Digitized by Google

punctum in parte CB ductis. Inter AF & CF igitur cadat GF media proportionalis, & per ea quæ demonſtrata ſunt, GF erit dupla ipſius FB, (ſi enim non fuerit dupla, quadratum GF in FB non erit maximum ſolidum quod fieri poſſit ex ſegmentis lineæ GB) ideoque quadratum GF, vel rectangulum AFC erit quadruplum quadrati FB.

Per 42 huius.



Quoniam autem rectangulum ABC excedit rectangulum AFC, quantitate rectanguli AB in BF vnà cum rectangulo ex CF in BF, producatur ad partes A linea AB, donec pars AC cum productâ AD ſimul æquales ſint ipſæ AB, & erit rectangulum ex DF in FB æquale exceſſui rectanguli ABC ſupra rectangulum AFC, His poſitis componatur hoc modo: Fiat rectangulum E cuius latus maius eſt triplum minoris & ita conſtituatur vt maius latus eius ſit parallelum lineæ AB datæ. Applicetur iam lineæ DB inuentæ latus faciens rectangulum æquale rectangulo ABC, excedens verò rectangulo ſimili rectangulo E ſimiliterque poſito, quod ſit rectangulum DH, cuius exceſſus rectangulum BH ſupra lineam DB, ſit ſimilis rectangulo E ſimiliterque poſitus: Inuen-

to que

toque iam lateri H I fiat B F æqualis. Dico punctum F eſſe punctum quæſitum, & ſolidum ex rectangulo A F C in lineam F B, eſſe maximum quod fieri poteſt ex quibuſlibet lineis a punctis A, B, & C ad aliquod punctum in parte C B ductis. Ducatur enim ab F linea F K parallela H I.

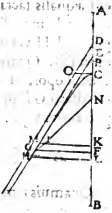
Et quoniam per conſtructionem factum eſt rectangulum D H æquale rectangulo A B C; exceſſus autem rectanguli ABC ſupra rectangulum AFC, æqualis eſt rectangulo ex A B & C F tanquam vnâ in F B; linea verò D C facta eſt æqualis lineæ A B; factum igitur ex D F in F B, hoc eſt rectangulum D K, æquale eſt exceſſui rectanguli ABC ſupra rectangulum AFC, & reliquum rectanguli D H ſcilicet F H, reliquo rectanguli A B, hoc eſt rectangulo A F C æquale erit. Sed rectanguli B H latus B I eſt triplum lateris I H, cui æqualis facta erat linea F B, quadrupla igitur eſt linea F I lineæ F B, vel lateris I H; Ideoque Rectangulum F H vel A F C ei æquale eſt quadruplum quadrati F B. Quare inuentum eſt in parte C B punctum F ſicut oportuit, & manifeſtum eſt quòd Solidum ex quadrato G F in F B ſit maximum omnium quæ fieri poterunt ex quibuſlibet ſegmentis lineæ G B.



Quamuis iam mihi videtur ſatisfactum Problemati, attamen quoniam obijci poteſt quòd ſi aliud ſumatur punctum putà L in parte F B (nam in parte F C manifeſtum eſt ex 42. huius quòd omnia ſolida erunt Nam media proportionalis minor eſt quàm G F.

mino-

minora) nondum ex demonſtratis appareat, quòd ſolidum ex rectangulo A L C in L B fuerit minus Solido ex rectangulo AFC in FB. Nam lineæ quæ media proportionalis eſt inter AL & LC, videlicet L M, erit linea quædam cuius terminus punctum M erit proprior A, quam eſt punctum G, ideoque tota M B maior G B; Quare linea M B ita ſecari poteſt, vt licet Solidum ex quadrato M L in L B non fuerit maximum quòd fieri poteſt ex ſegmentis eiuſdem M L; attamen maius vel æquale ſolido ex quadrato G F in FB. Vt igitur huic obiectioni ſatisfacerem compoſueram quandam demonſtrationem, quæ ob media neceſſaria & aliquos caſus particulares, mihi videbatur adeo prolixa; vt melium duxerim illam prorſus omittere, & eius loco hanc ſequentem per lineam Hyperbolicam ponere.



Sit igitur recta A B ſecta vt ſupra in puncto C, & in F, ita vt rectangulum A F C ſit quadruplum quadrati F B. Erectâ iam a puncto F perpendiculari F G æquali lineæ F B, & facto C vertice, deſcribatur Hyperbola C G H tranſiens per punctum G. Quare cum Rectangulum AFC ſit quadruplum quadrati F G, erit A C diameter ſectionis quadrupla recti lateris; A puncto igitur C erigatur perpendicularis, & fiat æqualis quartæ parti lineæ A C, & diuiſâ bifariam A C in D, erit D centrum Sectionis, & ductâ D O & produ-

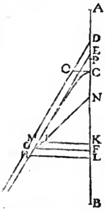
21. lib. 1. Appol. Conic.

ctâ in infinitum erit D O producta aſymptotos Hyperbolæ C G H. Sumpto iam puncto L vtcunque in parte F B: Dico Solidum ex rectangulo A L C in L B minus eſſe Solido ex rectangulo A F C in F B vel F G: Erigatur enim perpendicularis L H occurrens ſectioni in H, & a puncto G ducatur recta G E æquidiſtans D O ſectionis aſyptoto; & ſi connectantur puncta G & H rectâ productâ in concurſum diametri ſectionis A C, coincidet illâ inter E & C; quare pars eiuſdem intercepta inter puncta G & H erit intra ſectionem, reliqua vero extra: ſit autem P punctum concursùs in lineâ E C; Fiat iam ſicut L P ad F P, ita F P ad K P, & a K erigatur perpendicularis occurrens rectæ P G H in M, extra ſectionem.

Et quoniam factum eſt ſicut L P ad F P, ita F P ad K P, erit ſimiliter in eâdem ratione ſicut L H ad EG, ita F G ad K M; & ſicut quadratum L H ad quadratum F G, ita linea L H ad lineam K M: Sed rectangulum A L C ad rectangulum A F C ob Hyperbolam ſe habet ſicut quadratum L H ad quadratum F G, ex æquo igitur ſe habebit linea L H ad lineam K M, ſicut rectangulum A L C ad rectangulum A F C; Ideoque Solidum ex rectangulo ALC in rectam K M, æquale erit ſolido ex rectangulo A F C in rectam FG vel F B.

Supponatur autem iam quod linea K M ordinatim applicata ſit a ſectione ad diametrum, ideoque quod cadat proprius lineæ F G quam eſt linea K M, & propterea tota ſit intra Sectionem. Rurſus quoniam triangulum E F G ſimile eſt triangulo D C O, erit E F

dupla



dupla FG, quare fiat FN æqualis FG, & ducta ſit N G, quæ ſecabit lineam KM in I puncto, & erit K I minor quam KM: Sed K I vel K N maior eſt quam L B, multo igitur maior eſt K M ipsâ L B, ideoque ſolidum ex rectangulo A L C in L B minor eſt ſolido ex A L C in K M, vel ex A F C in F B quod demonſtrandum erat.

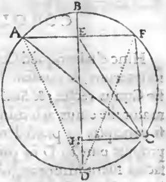
Quod autem K I vel KN ſit maior quam L B ſic probatur. Cùm enim L P, F P, K P ſint per conſtructionem continuè proportionales, erit differentia ipſarum L F maior differentiâ F K, ſed F B & F N ſunt æquales; Igitur K N vel K I maior eſt quam L B.

Hóc iam demonſtrato manifeſtum eſt quòd maior ſit ratio F B ad L B quam Rectanguli A L C ad rectangulum A F C, & ideo in figurâ præcedente, quòd P N maior ſit F B ſicut aſſumptum fuit. Maximum igitur ſolidum quod fieri poteſt ex quibuſlibet tribus rectis a punctis A, B, & C ad aliquod punctum in parte C B ductis, eſt illud quod fit ad punctum F, ſcilicet ex lineis A F C F & B F, ita vt rectangulum A F C ſit quadruplum quadrati B F.

Idem etiam demonſtrabitur in minore ſegmento quando punctum F ita ſumptum fuerit vt rectangulum A F C ſit quadruplum quadrati B F.

PROPOSITIO II.

Si in ſphærâ inſcriptus fuerit Conus Scalenus, & per centrum baſis ipſius ducta, fuerit diameter Sphæræ, ad quam a vertice Coni Scaleni cadat perpendicularis ſecans ipſam. Conus ille Scalenus erit ad Sphæram in quâ inſcribitur, ſicut Solidum ex tribus ſegmentis diametri Sphæræ terminatis ad centrum baſis ipſius Coni, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ.



IN Sphærâ ABCD inſcribatur Conus aliquis Scalenus ACF cuius vertex C, baſis circulus circa diametrum AF, & centrum ipſius E, per quod & centrũ Sphæræ ducatur recta BED, quæ ideo erit diameter vel axis ſphæræ. Iam ductâ perpendiculari a vertice Coni Scaleni C ad axem ſphæræ, ſecante ipſum in H puncto, ductiſque rectis DA & DF, concipiatur in eâdem Sphærâ Conus rectus ADF. Dico Conum Scalenum ACF eſſe ad Sphæram AB-

CD, ſicut ſolidum ex tribus lineis D E, B E & H E ad dimidium Cubi ex diametro BD.

Lemma ad Prop. 59.

Quoniam enim Conus rectus A D F eſt ad Sphæram A B C D, ſicut Solidum ex quadrato D E in E B, vel ex rectangulo D E B in E D ad dimidium Cubi ex D B; Conus vero Scalenus A C F, cum habeat eandem baſim A F, eſt ad Conum rectum A D F, in ratione altitudinis ipſius, ſcilicet rectæ E H ad rectam E D altitudinem Coni recti A D F, vel ſicut ſolidum ex rectangulo D E B in E H ad Solidum ex eodem rectangulo D E B in E D; ex æquo igitur Conus Scalenus A C F ſe habet ad Sphæram A B C D, ſicut ſolidum ex tribus lineis D E, H E, & B E ſegmentis diametri B D, terminatis ad punctum E centrum baſis Coni Scaleni A C F, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ, ſicut demonſtrandum erat.

12. Eucl. Prop. 14.

COROLLARIVM.

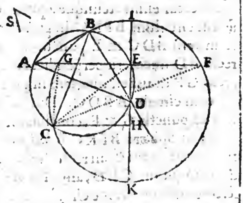
Hinc elicitur, quòd Conorum in eâdem Sphærâ inſcriptorum, & eandem habentium baſim, maximus ſit Conus rectus; & Scalenorum ad inuicem, ſemper maior ille cuius axis minùs inclinatus ſit baſi. Nam ſi concipias in præcedente figurâ, punctum C eſſe propius puncto D in parte D C, vnde angulus ad E factus fuerit minor angulo C E D, tunc punctum H in axe, in quod cadit perpendicularis a puncto C, erit propiùs puncto D, ideoque altitudo Coni illius maior erit altitudine E H Coni A C F; & proinde maiorem rationem habebit ad Sphæram A B C D, in quâ

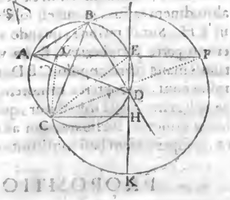
inſcribitur. Solidum enim ex rectangulo DEB in altitudinem ipſius, maius eſt ſolido ex rectãgulo DEB in EH. Simili ratione, quando vertex Coni Scaleni erit in parte peripheriæ CE, ita vt angulus inclinationis maior fuerit angulo CED, minor erit altitudo ipſius coni, & propterea minorem rationem habebit ad Sphæram in quâ inſcribitur, quàm Conus ille qui habet minorem inclinationem ad diametrum Sphæræ, & ſuper eâdem baſi conſtituitur.

PROPOSITIO III.

Si Conorum Scalenorum in Sphærâ inſcriptorum, & ſimiliter inclinatorum, vnum ſit punctum verticis, omnia Centra baſium ipſorum in eodem erunt Circulo.

SIT Circulus ABDC, in cuius peripheriâ ſumatur vtcũque punctum A, a quo ducatur diameter eius. AD. Propoſito iam quocunque angulo acuto, putà S, pro angulo inclinationis alicuius Coni Scaleni; & ſumpto puncto C, ita vt





peripheria CABD capiat angulum æqualem angulo S, ducatur ab illo recta C B ad angulos rectos ipſi A D, & iungatur BD: Facto iam centro D & interuallo DB deſcribatur circulus BF-KC, & concipiatur (quando opus) ex reuolutione ipſius, Sphæra. Dico omnes Conos Scalenos habentes eundem verticem C, & axes ſuos inclinatos a perpendiculari ſecundum angulum S, & in eâdem Sphærâ BFKC inſcriptos, habere baſium ſuarum centra in ipſâ peripheriâ circuli ABDC.

Ducatur enim vtcunque a puncto A, recta AGEF ſecans circulum BFKC in punctis G & F, peripheriam verò BDC in E puncto, a quo ad centrum D recta ED ducta erit perpendicularis ipſi GF, ideoque recta GF diuiſa eſt bifariam in puncto E interſectionis cum circulo ABDC. Ductis iam ad punctum C rectis a punctis G & F, concipiatur GCF conus Scalenus in Sphærâ BFKC inſcriptus, cuius axis CE inclinatur ab axe Coni recti, hoc eſt a lineâ ED ſecundum angulum CED; angulus verò CED, cum inſcriptus ſit in portione circuli CABD, æqualis eſt angulo propoſito S: Quare manifeſtum eſt punctum E.

(quod

Digitized by Google

(quòd centrum eſt baſis Coni Scaleni G C F) eſſe in peripheria circuli A B D C.

Quòd autem nullus ſit Conus Scalenus cuius baſis centrum ſit extra peripheriam eiuſdem circuli BDC, & qui habeat eandem inclinationem, ſcilicet anguli S, facilè ex hoc deducitur. Suppoſito enim primò, quòd C E fuerit etiam axis alicuius Coni Scaleni ſimiliter inclinati, cuius baſis centrum non fuerit idem punctum E, ſed vel extra peripheriam BDC vel intra; ſi ab illo, (vtcunque fuerit) ducta ſit recta ad D centrum Sphæræ, faciet angulum vel maiorem vel minorem angulo C E D, hoc eſt angulo propoſito S. Abſurdum igitur eſt dicere quod centrum baſis Coni Scaleni cuius vertex C punctum, inſcripti ſphærâ B F K C, poſſit eſſe extra peripheriam circuli BDC. Si vero axis Coni non fuerit eadem recta C E, verùm aliqua alia recta à puncto C ducta, nihil refert; nam ſemper linea a puncto A ducta ad punctum interſectionis ipſius rectæ cum peripheria BDC habebit partem ipſius interceptam in circulo B F K C diuiſam ab ipſo puncto bifariam, & nullum aliud punctum poteſt dari extra peripheriam B D C, a quo idem efficiatur. Quare manifeſtum eſt quòd omnes Coni Scaleni, quorum idem eſt vertex C, ſimiliter inclinati & inſcripti Sphærâ B F K C, habeant baſium ſuarum centra in circulo A B D C.

COROLLARIVM.

Hinc & ex prius demonſtratis manifeſtè apparet, quòd producta vtrinque E H ad I, & K, ita vt linea

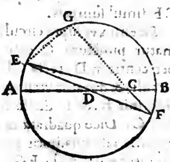
I K ſit axis ſphæræ B F K C, in quâ inſcribitur Conus Scalenus B C F, ipſe Conus Scalenus habeat ad Sphæram eandem rationem, quam habet Solidum ex rectangulo K E H in E I ad dimidium Cubi totius diametri I K: Vnde etiam conſtat, quòd ſi rectangulum K E H ſit quadruplum quadrati E I, tunc Conus Scalenus G C F ſit maximus qui in eâdem inclinatione inſcribi poſſit in eâdem ſphærâ.

PROPOSITIO
DE SVPERFICIE CONI SCALENI.

In quà aliquæ paſsiones Circulorum aperiuntur.

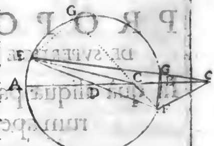
PROPOSITIO I.

Quadrata binarum rectarũ a terminis alicuius diametri ad aliquod punctum, ſiue intra, ſiue extra circulum ductarum, ſimul ſumpta æqualia ſunt binis quadratis, quæ a terminis cuiuſcunque alterius diametri ad idem punctum ducuntur.



SIt Circulus cuius centrum D, & intra ipſum ſumatur vtcunque punctum C, per quod & centrum D tranſeat diameter AB: ductâ iam vtcunque diametro EF, a terminis ipſius ad punctũ C ducantur rectæ EC & FC. Dico aggregatum quadratorum ex EC & FC ſimul æquale eſſe aggregato ex quadratis AC & BC.

Pro-



Producatur enim FC ad peripheriam in G & connectantur puncta GE. Et quoniam triangulũ FCE eſt ambligonium, quadratum quod fit ex FE angulũ obtuſum ſubtedente maius eſt duobus quadratis ex FC & CE quantitate duorum rectangulorum ex FC & CG; nam linea EG eſt perpendicularis ipſi FG: Sed quadratum FE æquale eſt quadrato ex AB; rectangulum etiam FCG æquale eſt rectangulo ACB; deductis igitur vtrobique duobus rectangulis FCG & ACB, duo quadrata ex FC & CE æqualia erunt duobus quadratis ex AC & CB.

Similiter demonſtrabitur, etiamſi punctum C ſumatur extra circulum, quòd quadrata rectarum EC & CF ſimul ſumpta, æqualia ſint quadratis ex AC & CB ſimul ſumptis.

Sit enim vt ſupra circulus cuius centrum D, & ſumatur punctum C extra circulum, a quo ducatur per centrum D, recta CBDA, & erit AB diameter circuli, & ducatur vtcunque alia diameter EF, a cuius terminis E, & F, ductæ ſint ad C punctum rectæ EC & FC. Dico quadrata ex EC & CF ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis ex AC & CB ſimul ſumptis, Ducatur enim recta FG, quæ perpendicularis erit rectæ EC.

Et quoniam angulus ECF eſt acutus, quadratum

quod

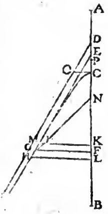
quod fit ex latere E F illum ſubtendente, minus eſt quadratis ex duobus lateribus E C & C F ipſum comprehendentibus, quantitate duorum rectangulorum, ſcilicet ex vno laterum EC & parte C G inter angulum C & perpendicularem F G interceptam: Sed rectangulo ex E C C G æquale eſt rectangulum ex A C & C B: Duo igitur quadrata ex E C & C F ſimul ſumpta, excedunt quadratum ex latere EF, quantitate duorum rectangulorum ex A C C B. Quadrata verò ex A C & C B excedunt quadratum ex A B eâdem quantitate, ſcilicet, duorum rectangulorum ex ipſis A C & C B. Duo igitur quadrata ex A C & C B ſimul ſumpta, æqualia ſunt aggregato duorum quadratorum ex rectis E C & C F factorum. Quod demonſtrandum erat.

DEFINITIO.

Si aggregatum ex pluribus magnitudinibus diuidatur ſecundum numerum ipſorum in partes æquales, Magnitudo ex diuiſione inuenta vocetur Media Arithmetica inter omnes.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur quòd, ſi ducta fuerit diameter H I ad rectos angulos ipſi A B, & iungatur H C, quadratum ex H C erit medium arithmeticum inter omnia quadrata rectarum ducendarum ab omnibus punctis peripheriæ circuli A H B I ad punctum C.



dupla F G , quare fiat F N æqualis F G , & ducta ſit N G, quæ ſecabit lineam K M in I puncto , & erit K I minor quam K M : Sed K I vel K N maior eſt quam L B, multo igitur maior eſt K M ipsâ L B, ideoque ſolidum ex rectangulo A L C in L B minor eſt ſolido ex A L C in K M, vel ex A F C in F B quod demonſtrandum erat.

Quod autem K I vel KN ſit maior quam L B ſic probatur . Cùm enim L P, F P, K P ſint per conſtructionem continuè proportionales, erit differentia ipſarum L F maior differentiâ F K, ſed F B & F N ſunt æquales; Igitur K N vel K I maior eſt quam L B.

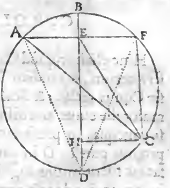
Hòc iam demonſtrato manifeſtum eſt quòd maior ſit ratio F B ad L B quam Rectanguli A L C ad rectangulum A F C, & ideo in figurâ præcedente, quòd P N maior ſit F B ſicut aſſumptum fuit. Maximum igitur ſolidum quod fieri poteſt ex quibuſlibet tribus rectis a punctis A, B, & C ad aliquod punctum in parte C B ductis, eſt illud quod fit ad punctum F, ſcilicet ex lineis A F C F & B F, ita vt rectangulum A F C ſit quadruplum quadrati B F.

Idem etiam demonſtrabitur in minore ſegmento quando punctum F ita ſumptum fuerit vt rectangulum A F C ſit quadruplum quadrati B F.

PRO-

PROPOSITIO II.

Si in ſphærâ inſcriptus fuerit Conus Scalenus, & per centrum baſis ipſius ducta, fuerit diameter Sphæræ, ad quam a vertice Coni Scaleni cadat perpendicularis ſecans ipſam. Conus ille Scalenus erit ad Sphæram in quâ inſcribitur, ſicut Solidum ex tribus ſegmentis diametri Sphæræ terminatis ad centrum baſis ipſius Coni, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ.



In Sphærâ ABCD inſcribatur Conus aliquis Scalenus ACF cuius vertex C, baſis circulus circa diametrum AF, & centrum ipſius E, per quod & centrũ Sphæræ ducatur recta BED, quæ ideo erit diameter vel axis ſphæræ. Iam ductâ perpendiculari a vertice Coni Scaleni C ad axem ſphæræ, ſecante ipſum in H puncto, ductiſque rectis DA & DF, concipiatur in eâdem Sphærâ Conus rectus ADF. Dico Conum Scalenum ACF eſſe ad Sphæram AB-

CD, ſicut ſolidum ex tribus lineis DE, BE & HE ad dimidium Cubi ex diametro BD.

Lemma ad Prop. 59.

Quoniam enim Conus rectus ADF eſt ad Sphæram ABCD, ſicut Solidum ex quadrato DE in EB, vel ex rectangulo DEB in ED ad dimidium Cubi ex DB; Conus vero Scalenus ACF, cum habeat eandem baſim AF, eſt ad Conum rectum ADF, in ratione altitudinis ipſius, ſcilicet rectæ EH ad rectam ED altitudinem Coni recti ADF, vel ſicut ſolidum ex rectangulo DEB in EH ad Solidum ex eodem rectangulo DEB in ED; ex æquo igitur Conus Scalenus ACF ſe habet ad Sphæram ABCD, ſicut ſolidum ex tribus lineis DE, HE, & BE ſegmentis diametri BD, terminatis ad punctum E centrum baſis Coni Scaleni ACF, ad dimidium Cubi totius diametri Sphæræ, ſicut demonſtrandum erat.

12. Eucl. Prop. 14.

COROLLARIVM.

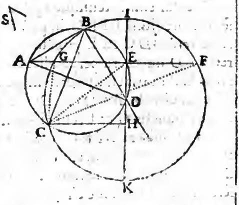
Hinc elicitur, quòd Conorum in eâdem Sphærâ inſcriptorum, & eandem habentium baſim, maximus ſit Conus rectus; & Scalenorum ad inuicem, ſemper maior ille cuius axis minùs inclinatus ſit baſi. Nam ſi concipias in præcedente figurâ, punctum C eſſe propius puncto D in parte DC, vnde angulus ad E factus fuerit minor angulo CED, tunc punctum H in axe, in quod cadit perpendicularis a puncto C, erit propiùs puncto D, ideoque altitudo Coni illius maior erit altitudine EH Coni ACF; & proinde maiorem rationem habebit ad Sphæram ABCD, in quâ

inſcri-

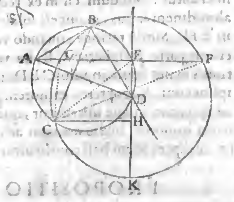
inſcribitur. Solidum enim ex rectangulo DEB in altitudinem ipſius, maius eſt ſolido ex rectãgulo DEB in EH. Simili ratione, quando vertex Coni Scaleni erit in parte peripheriæ CE, ita vt angulus inclinationis maior fuerit angulo CED, minor erit altitudo ipſius coni, & propterea minorem rationem habebit ad Sphæram in quâ inſcribitur, quàm Conus ille qui habet minorem inclinationem ad diametrum Sphæræ, & ſuper eâdem baſi conſtituitur.

PROPOSITIO III.

Si Conorum Scalenorum in Sphærâ inſcriptorum, & ſimiliter inclinatorum, vnum ſit punctum verticis, omnia Centra baſium ipſorum in eodem erunt Circulo.



SIT Circulus ABDC, in cuius peripheriâ ſumatur vtcũque punctum A, a quo ducatur diameter eius. AD. Propoſito iam quocunque angulo acuto, putà S, pro angulo inclinationis alicuius Coni Scaleni; & ſumpto puncto C, ita vt



peripheria CABD capiat angulum æqualem angulo S, ducatur ab illo recta C B ad angulos rectos ipſi A D, & iungatur B D; Facto iam centro D & interuallo D B deſcribatur circulus BF-KC, & concipiatur (quando opus) ex reuolutione ipſius, Sphæra. Dico omnes Conos Scalenos habentes eundem verticem C, & axes ſuos inclinatos a perpendiculari ſecundum angulum S, & in eâdem Sphærâ B F K C inſcriptos, habere baſium ſuarum centra in ipſâ peripheriâ circuli A B D C.

Ducatur enim vtcunque a puncto A, recta A G E F ſecans circulum B F K C in punctis G & F, peripheriam verò B D C in E puncto, a quo ad centrum D recta E D ducta erit perpendicularis ipſi G F, ideoque recta G F diuiſâ eſt bifariam in puncto E interſectionis cum circulo A B D C. Ductis iam ad punctum C rectis a punctis G & F, concipiatur G C F conus Scalenus in Sphærâ B F K C inſcriptus, cuius axis C E inclinatur ab axe Coni recti, hoc eſt a lineâ E D ſecundum angulum C E D; angulus verò C E D, cum inſcriptus ſit in portione circuli C A B D, æqualis eſt angulo propoſito S: Quare manifeſtum eſt punctum E

(quod centrum eſt baſis Coni Scaleni GCF) eſſe in peripheria circuli ABDC.

Quòd autem nullus ſit Conus Scalenus cuius baſis centrum ſit extra peripheriam eiuſdem circuli BDC, & qui habeat eandem inclinationem, ſcilicet anguli S, facilè ex hoc deducitur. Suppoſito enim primò, quòd CE fuerit etiam axis alicuius Coni Scaleni ſimiliter inclinati, cuius baſis centrum non fuerit idem punctum E, ſed vel extra peripheriam BDC vel intra; ſi ab illo, (vtcunque fuerit) ducta ſit recta ad D centrum Sphæræ, faciet angulum vel maiorem vel minorem angulo CED, hoc eſt angulo propoſito S. Abſurdum igitur eſt dicere quod centrum baſis Coni Scaleni cuius vertex C punctum, inſcripti ſphæræ BFKC, poſſit eſſe extra peripheriam circuli BDC. Si vero axis Coni non fuerit eadem recta CE, verùm aliqua alia recta à puncto C ducta, nihil refert; nam ſemper linea a puncto A ducta ad punctum interſectionis ipſius rectæ cum peripheria BDC habebit partem ipſius interceptam in circulo BFKC diuiſam ab ipſo puncto bifariam, & nullum aliud punctum poteſt dari extra peripheriam BDC, a quo idem efficiatur. Quare manifeſtum eſt quòd omnes Coni Scaleni, quorum idem eſt vertex C, ſimiliter inclinati & inſcripti Sphæra BFKC, habeant baſium ſuarum centra in circulo ABDC.

COROLLARIVM.

Hinc & ex prius demonſtratis manifeſtè apparet, quòd producta vtrinque EH ad I, & K, ita vt linea

I K ſit axis ſphæræ B F K C, in quâ inſcribitur Conus Scalenus B C F, ipſe Conus Scalenus habeat ad Sphæram eandem rationem, quam habet Solidum ex rectangulo K E H in E I ad dimidium Cubi totius diametri I K: Vnde etiam conſtat, quòd ſi rectangulum K E H ſit quadruplum quadrati E I, tunc Conus Scalenus G C F ſit maximus qui in eâdem inclinatione inſcribi poſſit in eâdem ſphærâ.

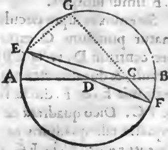
PROPOSITIO

DE SVPERFICIE CONI SCALENI.

In quà aliquæ paſsiones Circulorum aperiuntur.

PROPOSITIO I.

Quadrata binarum rectarũ a terminis alicuius diametri ad aliquod punctum, ſiue intra, ſiue extra circulum ductarum, ſimul ſumpta æqualia ſunt binis quadratis, quæ a terminis cuiuſcunque alterius diametri ad idem punctum ducuntur.



SIt Circulus cuius centrum D, & intra ipſum ſumatur vtcunque punctum C, per quod & centrum D tranſeat diameter AB: ductâ iam vtcunque diametro EF, a terminis ipſius ad punctũ C ducantur rectæ EC & FC. Dico aggregatum quadratorum ex EC & FC ſimul æquale eſſe aggregato ex quadratis AC & BC.

Producatur enim FC ad peripheriam in G & connectantur puncta GE. Et quoniam triangulũ FCE eſt ambligonium, quadratum quod fit ex FE angulũ obtuſum ſubtedente maius eſt duobus quadratis ex FC & CE quantitate duorum rectangulorum ex FC & CG; nam linea EG eſt perpendicularis ipſi FG: Sed quadratum FE æquale eſt quadrato ex AB; rectangulum etiam FCG æquale eſt rectangulo ACB; deductis igitur vtrobique duobus rectangulis FCG & ACB, duo quadrata ex FC & CE æqualia erunt duobus quadratis ex AC & CB.



Similiter demonſtrabitur, etiamſi punctum C ſumatur extra circulum, quod quadrata rectarum EC & CF ſimul ſumpta, æqualia ſint quadratis ex AC & CB ſimul ſumptis.

Sit enim vt ſupra circulus cuius centrum D, & ſumatur punctum C extra circulum, a quo ducatur per centrum D, recta CBDA, & erit AB diameter circuli, & ducatur vtcunque alia diameter EF, a cuius terminis E, & F, ductæ ſint ad C punctum rectæ EC & FC. Dico quadrata ex EC & CF ſimul ſumpta, æqualia eſſe quadratis ex AC & CB ſimul ſumptis. Ducatur enim recta FG, quæ perpendicularis erit rectæ EC.

Et quoniam angulus ECF eſt acutus, quadratum

quod ſit ex latere E F illum ſubtendente, minus eſt quadratis ex duobus lateribus E C & C F ipſum comprehendentibus, quantitate duorum rectangulorum, ſcilicet ex vno laterum EC & parte C G inter angulum C & perpendicularem F G interceptam: Sed rectangulo ex EC CG æquale eſt rectangulum ex A C & C B: Duo igitur quadrata ex E C & C F ſimul ſumpta, excedunt quadratum ex latere EF, quantitate duorum rectangulorum ex A C C B. Quadrata verò ex A C & C B excedunt quadratum ex A B eâdem quantitate, ſcilicet, duorum rectangulorum ex ipſis A C & C B. Duo igitur quadrata ex A C & C B ſimul ſumpta, æqualia ſunt aggregato duorum quadratorum ex rectis E C & C F factorum. Quod demonſtrandum erat.

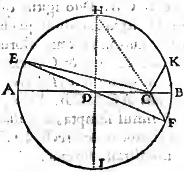
DEFINITIO.

Si aggregatum ex pluribus magnitudinibus diuidatur ſecundum numerum ipſorum in partes æquales, Magnitudo ex diuiſione inuenta vocetur Media Arithmetica inter omnes.

COROLLARIVM.

Hinc deducitur quòd, ſi ducta fuerit diameter H I ad rectos angulos ipſi A B, & iungatur H C, quadratum ex H C erit medium arithmeticum inter omnia quadrata rectarum ducendarum ab omnibus punctis peripheriæ circuli A H B I ad punctum C.

Concipiantur enim in ſemicirculo AHB quotcunque puncta per æquales arcus ad inuicem diſtantia, ex quibus ſumantur quæcunque duo puncta puta E & K æqualiter ab A & B diſtantia, & puncto C, connectantur rectis E C & K C; Ductáque diametro EDF Manifeſtum eſt quod arcus FB & BK ſint æquales, ideoque etiam rectæ FC CK; quare duo quadrata EC & CK æqualia ſunt duobus quadratis ex AC & CB ſimul ſumptis: Sed linea AB diuiſa eſt bifariam in D & non bifariam in C, quare quadrata ex A C & C B ſimul, æqualia ſunt duobus quadratis ex AD vnà cum duobus quadratis ex DC, hoc eſt, duobus quadratis ex HC: Duo igitur quadrata ex H C æqualia ſunt quadratis ex E C & C K ſimul ſumptis. Quantò ergo quadratum ex E C ſuperat quadratum ex H C, tantò idem quadratum ex H C ſuperat quadratum ex C K, & ſic ſemper per totum ſemicirculum A H B, vbicunque ſumpta fuerint bina quæcunque puncta in peripheriâ a punctis A, & B, æquidiſtantia, quadratum ex H C erit inter quadrata rectarum ad punctum C ducta medium Arithmeticum, ſicut dictum fuit.



Si verò punctum C fuerit extra circulum in diametro productâ, per 10. ſecundi Euclidis demonſtrabitur etiam, quòd ſi ducatur ab illo recta ad punctum H,

recta ſic ducta erit potentiâ Medium Arithmeticum inter quadratum A C (hoc eſt ex compoſitâ ex A B, B C tanquam vnâ) & quadratum C B partem extra circulum.

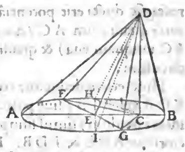
Hinc etiam deducitur, quòd duo ſpatia A C E & K C B vel F C B (ſiue punctum C ſumatur extra vel intra circulum) ſimul ſumpta, æqualia ſint duobus ſectoribus A D E & F D B: Triangula enim D E C & F D C, cùm inſiſtant eidem baſi D C, & ſint eiuſdem altitudinis (nam perpendiculares a punctis F & E ad diametrum A B demiſſæ æquales erunt) ſunt inuicem æqualia: Ideoque deducto ex ſpatio A C E, triangulo DEC, & addito ſpatio F C B triangulo DFC, erunt duo ſectores A D E, F D B, duobus ſpatijs A C E & F C B, vel K C B æquales. II.

PROPOSITIO II.

Inuenire in ſuperficie Coni Scaleni rectam, cuius quadratum ſit Medium Arithmeticum inter omnia quadrata laterum in ſuperficie Coni Scaleni ductorum.

HIS poſitis exponatur Conus aliquis Scalenus A D B cuius baſis ſit Circulus A H B I, diametri A B & H I ad rectos angulos, vertex D, a quo cadat perpendicularis D C in diametrum A B: Duca-

Digitized by Google



tur iam alia diameter vt-
cunque F E G, a cuius ex-
tremitatibus F & G pun-
ctis, ducantur in ſuperfi-
15 cie coni A D B rectæ F D
& G D, connectanturque
A D B D & H D. Et quo-
niam recta D C eſt perpen-
dicularis ad planum baſis, faciet angulos rectos cum
lineis A C, B C, F C, & G C; quadrata vero ex F C
& G C ſimul ſumpta demõſtrantur eſſe æqualia duo-
bus quadratis ex A C & C B, vel duobus quadratis ex
H C; quare ſi addatur ſingulis, commune quadratum
D C, erunt quadrata ex A C & C B vnà cum duobus
quadratis D C ſimul æqualia quadratis ex F C & C G
ſimul cum ipſis duobus quadratis D C, quibus etiam
æqualia ſunt duo quadrata ex H C vnà cum duobus
quadratis D C. Sed quadratum ex F D æquale eſt qua-
dratis ex F C & C D, & quadratum ex D G æquale
eſt duobus quadratis G C & D C; duo igitur quadra-
ta, ſcilicet F D & G D æqualia ſunt duobus quadra-
tis F C & G C vnà cum duobus quadratis D C; Qua-
re etiam æqualia ſunt duobus quadratis ex A D & D B
ſimul, ſiue duobus quadratis ex H D.

Cùm igitur duo quadrata ex F D & D G ſimul ſum-
pta æqualia ſint duobus quadratis ex H D, quadratum
autem F D maius ſit quadrato D G; ſequitur quod
quantò quadratum F D ſuperat quadratum H D, tan-
tò quadratum H D ſuperat quadratum G D. Idem
demonſtrabitur de quadratis rectarum A D & B D,

nec

Digitized by Google

nec non de quibuſlibet alijs rectis vtcunque ductis a vertice D ad terminos cuiuſcunque diametri in baſe ipſius Coni Scaleni, & per totum ipſius ſuperficiem; Quare quadratum rectæ HD erit medium Arithmeticum inter omnia quadrata rectarum a vertice D ad omnia puncta, vel ad quotlibet æquidiſtantia puncta numero paria ſumpta in peripheria circuli qui baſis eſt ipſius Coni Scaleni ADB.

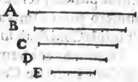
Licet in figurâ punctum C, in quod cadit perpendicularis a vertice Coni Scaleni repreſentatur intra circulum qui baſis eſt Coni, tota vero demonſtratio eſt vniuerſalis, & efficax, tam, ad demonſtrandum, quando idem punctum fuerit extra, quàm intra: Ex ſecundâ enim parte propoſitionis primæ dependet.

PROPOSITIO III.

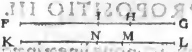
Si fuerint quotcunque lineæ inæquales, numero impari, fuerint autem duo quadrata ex mediâ ipſarum æqualia duobus quadratis quæ ab extremis fiunt, nec non & quibuſlibet alijs binis quadratis a rectis ordine a mediâ æqualiter diſtantibus. Dico quòd recta quæ dupla eſt mediæ maior ſit lineâ compoſitâ ab extremis, vel a quibuſcunque binis alijs æqualiter a medijs diſtantibus: & quòd

compoſita ex extremis minor ſit quâ-
cunque compoſitâ ex intermedijs.

Sint enim quinque lineæ inæquales A, B, C, D, E, quarum ſit media C. Sit autem duplum quadrati C æquale quadratis extremarum A & E, nec non & duobus quadratis ex intermedijs B & D. Dico quòd recta æqualis duplæ C, maior ſit quam linea



compoſita ex extremis A & E. Componatur enim ſimul A & E, & fiat vna recta F G, quæ diuidatur ita in H vt ſit F H æqualis A, H G verò æqualis E, & iterum biſariam ſecetur in puncto I.



Et quoniam quadrata ex F H & H G ſimul ſumpta æqualia ſunt duobus quadratis ex FI vnà cum duobus quadratis ex I H, quadratum ex F I minus erit quadrato ex C, (duo enim quadrata ex lineâ C ponuntur æqualia duobus quadratis ex F H & H G.) Maior igitur eſt linea C quam F I dimidia aggregati ex A & E.

Rurſus dico quòd linea compoſita ex intermedijs B & D maior ſit quam compoſita ex extremis A & E, quòd autem minor ſit quam dupla C ex iam dictis conſtat. Supponatur autem æqualis compoſitæ ex A

& E

& E ſi fieri poteſt; Quoniam autem maior eſt differentia inter A & E, quam inter B & D, minor erit ratio B ad D, quam A ad E, ideoque in lineâ K L quæ æqualis ponatur rectæ F G, fiat K M ad M L, ſicut B ad D, & biſariam ſecetur tota K L in N.

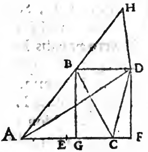
Et quoniam quadrata K M & M L ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis ex F H & H G; linea verò K L ſecta eſt biſariam in N & non biſariam in M, ideo duo quadrata K N vnà cum duobus quadratis ex NM ſimul, æqualia ſunt duobus quadratis ex K M & M L vel F H & H G; Sed minor eſt ratio K M ad M L, quam F H ad H G, minor igitur eſt K M quam F H; K N vero æqualis F I, & ideo N M minor eſt quam I H; Quare duo quadrata ex K N vnà cum duobus quadratis N M minora ſunt duobus quadratis F I cum duobus quadratis I H, hoc eſt duobus quadratis ex F H & H G. Non poteſt igitur linea K L quæ ponitur æqualis lineæ F G, vel aggregato extremarum A & E, eſſe æqualis aggregato ex B & D; neque minor eſſe poteſt. Oportet ergo quòd compoſita ex extremis A & E, minor ſit quâcunque lineâ factâ ex aggregato quarumlibet intermediarum ordinatim ſumptarum.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt quòd in diagrammate præcedentis propoſitionis, duplum lineæ H D (cuius quadratum eſt medium Arithmeticum inter omnia quadrata rectarum in ſuperficie Coni Scaleni A D B ductarum

ctarum a vertice ad baſim) ſit maius aggregato rectarum F D & D G, & quòd aggregatum ex F D & D G etiam maius ſit aggregato ex A D & D B; Vnde etiam conſtat, quòd aggregatum, ex A D & D B, ſit omnium aggregatorum quarumcunque rectarum, a terminis cuiuſcunque diametri in baſe dicti Coni ductarum ad verticem D, minimum.

LEMMA.



Sint duo triangula A B C & A D C ſuper eâdem baſi AC conſtituta, & ſint eorum perpendiculares ad baſim, ſcilicet B G & D F inter ſe æquales, punctum autem E ſit in medio baſis A C, & ſit maior diſtantia puncti F in quod cadit perpendicularis a vertice D, ab E puncto, quam puncti G, in quod cadit perpendicularis a vertice B ab ipſo E: Dico aggregatum ex A D & D C maius eſſe aggregato ex A B & B C.

Conſtituantur enim triangula ABC & ADC ita ſuper baſi communi A C, vt perpendiculares quæ a verticibus eorum, videlicet B G & D F, cadant ad eaſdem partes puncti E. Producatur iam A B, & in producta fiat B H æqualis B C, & connectantur rectis H D, & B D. Et quoniam in triangulo A B C, latus A B maius eſt latere B C, erit angulus BAC vel HBD (parallela enim eſt B D baſi A C) minor angulo ACB

vel

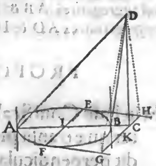
vel DBC; quare cum ſint duo triangula HBD & DBC quæ duo latera HB & BD duobus lateribus trianguli BDC ſcilicet BC & BD æqualia habeant, angulum vero DBC minorem angulo HBD, latus DC maius erit latere DH. Ideoque aggregatum ex AD & DH minus erit aggregato ex AD & DC: Sed aggregatum ex AD & DH maius eſt lineâ AH, vel aggregato ex AB & BC, multò igitur maius erit aggregatum ex AD & DC, aggregato ex AB & BC.

PROPOSITIO IV.

Si in baſe Coni Scaleni ducta fuerit diameter quæ tranſit per punctum in quod cadit perpendicularis a vertice, ducta autem fuerit & alia diameter vtcunque, ad terminos vero vtriuſque diametri applicatæ fuerint tangentes circulo: Et ſi ad ſingulas earum a vertice Coni ductę fuerint perpendiculares. Dico quod aggregatum binarum perpẽdicularium quę a vertice Coni Scaleni ducuntur ad terminos diametri, quæ tranſit per punctum in quod cadit perpendicularis, ſit maius aggregato binarum perpendicularium quæ ad lineas tangentes baſim,

Coni in terminis alterius diametri ducuntur.

SIt enim Conus Scalenus A D B cuius baſis Circulus A E B F, vertex D, perpendicularis D C cadens in planum baſis in puncto C, ad quod ducatur diameter baſis recta A B C: Sit iterum alia diameter vtcunque E F, & ad ſingula puncta in peripheriâ baſis A, B, E, & F, ducantur tangentes, ad quas a puncto C, ducantur perpendiculares C B, C A, C H, & C G; & a vertice D ducantur rectæ D A, D B, D H, & D G, quas dico eſſe ſingulis tangentibus



quibus occurrunt perpendiculares. Quoniam enim
18.11, Euclid. linea D C eſt ad planum baſis erecta, erit planum in quo triangulum D G C ad planum baſis erectum: Sed linea F G eſt perpendicularis lineæ G C, ideoque, cùm ſit in plano quod eſt ad planum trianguli erectũ, erit ad lineam etiam G D perpendicularis: Simili modo demonſtrabitur quod reliquæ lineæ D H, D B & D A ſint etiam perpendiculares ſingulis tangentibus circulum in punctis A, E, & B. Dico iam quod aggregatum duarum linearum A D & D B, quæ ſunt perpendiculares lineis tangentibus circulum in punctis A & B maius eſſe aggregato ex binis D H & D G, quæ ſunt perpendiculares lineis E H & F G tangentibus baſim coni in punctis E & F.

Quo-

Quoniam enim ſunt duo triangula ADB & GDH, in eâdem altitudine conſiſtentia, & ſuper baſibus æqualibus, eſt enim GH æqualis FE, FE vero æqualis AB, quapropter baſis GH æqualis eſt baſi AB: Punctum autem C in quod perpendiculum cadit, magis diſtat à puncto I in medio baſis trianguli ADB, quàm diſtat idem punctum C a puncto K, quod medium eſt baſis trianguli GDH; latera igitur AD, DB trianguli ADB ſimul ſumpta, maiora ſunt lateribus GD, DH, trianguli GDH ſimul ſumptis. Per Lemma præcedens.

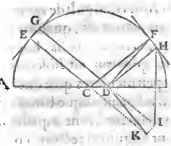
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt quòd, quò propius accedat punctum in quod cadit perpendicularis a vertice ad medium baſis, eò minus eſſe aggregatum binorum laterum trianguli de quo quæritur, & quòd minimum aggregatum eſt, quando perpendiculum cadit in ipſum dimidium baſis, hoc eſt, quando triangulum de quo quæritur eſt Iſoſceles. Ideoque minimæ binæ perpendiculares quæ duci poſſunt à vertice Coni Scaleni ad quaſcunque binas tangentes in terminis alicuius diametri, ſunt æquales duabus rectis, quæ ſubtendunt angulum rectum comprehenſum a duabus rectis, quarum vna æqualis eſt altitudini Coni, reliqua vero ſemidiametro baſis eius. Maximum igitur aggregatum ex binis perpendicularibus a vertice Coni D ductis ad quaſcunque binas tangentes ad baſim, eſt ex AD & DB: Minimum autem eſt æquale duobus lateribus Coni recti ſuper eâdem baſi AEBF & in eâdem altitudine DC conſtituti.

Digitized by Google

PROPOSITIO V.

Si in peripheriâ Semicirculi ſumantur duo puncta ab vtroque baſis termino æquidiſtantia, & ad vtrumque illorum ducantur rectæ tangentes Semicirculum, & ſi ab aliquo alio puncto in diametro, ipſis tangentibus ductæ fuerint perpendiculares. Dico aggregatum ex perpendicularibus illis æquale eſſe diametro Semicirculi.



Sit Semicirculus AEFB cuius centrum C, & in diametro AB ſumatur vtcunque punctum D: In peripheriâ autem ſecirculi ſumptis punctis E, & F, ab A, & B æquidiſtantibus, ductæ ſint ipſis rectæ E G, F H tangentes ſemicirculum, & a puncto D, ipſis tangentibus perpendiculares D G & D H. Dico rectas D G & D H ſimul ſumptas, æquales eſſe diametro A B. A centro enim ducantur rectæ C E & C F, quæ etiam perpendiculares erunt tangentibus: ideoque parallelæ lineis G D & D H; ab H verò ducatur H I ad angulos rectos diametro

AB ſi opus productæ, & producta GD concurrat ipſi in puncto I; producatur etiam EC & fiat CK ei æqualis, & a K ducatur KI.

Et quoniam anguli ad centrum ECA, FCB ſunt æquales, ob æquales peripherias quibus inſiſtunt, erunt etiam anguli GDA & BDH æquales ipſis, & ad inuicem; angulus vero BDI eſt æqualis angulo GDA, ideoque etiam angulo HDB, ſed DB eſt perpendicularis HI, ideoque DI æqualis DH, & tota GI aggregato ex GD & DH. A puncto iam D ducantur rectæ DF & DK, quæ quoniam punctum K eſt etiam in circulo, & peripheria BK æqualis peripheriæ BF, erit DF æqualis DK; & igitur in triangulis FDH, & KDI, erunt latera FD, DH æqualia lateribus KD, DI, & angulus FDH æqualis angulo KDI, ideoque angulus DIK æqualis angulo DHF, & propterea rectus. Quare EGIK eſt parallelogrammum & latus GI æquale lateri EK, vel diametro AB. Aggregatum igitur ex GD & DH hoc eſt ex perpendicularibus a puncto D ad tangentes ductis æquale eſt diametro AB quod probandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quòd ſi ſumpta fuerint quotcunque puncta æquidiſtantia in peripheriâ circuli, & per ſingula eorum ductæ tangentes circulo, & ad ſingulas tangentes, a centro C, & puncto D, ductæ perpendiculares, quòd omnes perpendiculares a puncto I.

D ad

D ad tangentes ſimul ſumptæ, æquales ſint omnibus perpendicularibus a centro ad eaſdem tangentes ductis; Quare, per definitionem medij Arithmetici, ſemidiameter A C eſt media Arithmetica inter omnes perpendiculares a puncto D ad ipſas tangentes ductas.

II. Apparet etiam quòd eadem recta quæ media eſt Arithmetica inter extremas perpendiculares, ſit etiam media Arithmetica inter omnes earum: Nam Semidiameter A C eſt media Arithmetica inter A D & D B, & inter omnes.

PROPOSITIO VI.

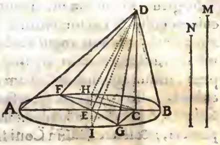
Superficies Conica Coni Scaleni æqualis eſt Circulo, cuius Radius eſt medius proportionalis inter radium Baſis Coni Scaleni & lineam quæ media eſt in ratione Arithmeticâ inter omnes Perpendiculares, quæ a vertice ipſius Coni ad omnes tangẽtes in punctis circuli ducũtur.

Eſto igitur Conus Scalenus A D B, cuius baſis Radius A E, & ſit linea M media Arithmetica inter omnes perpendiculares a vertice D ad omnes lineas tangentes baſim A H B I: Sit autem inter M & A E media proportionalis N. Dico circulum ex radio N æqualem eſſe ſuperficiei conicæ Coni A D B.

Quòd autem ita ſe habet, probo. Concipiantur ex

radijs

radijs M & N facti circuli, & circa illos & baſim Coni circumſcriptæ ſimiles figuræ polygoniæ ex æqualibus lateribus & angulis, & ab vnoquoque angulorum ad centrum ductæ rectæ; a figurâ verò circumſcribente baſim Coni ad verticem D ducantur plana per verticem & ſingula figuræ latera, ex quibus facta erit Pyramis circumſcribens Conum. Triangula igitur quæ fiunt ex ductu rectarum ad centra in figuris circumſcribẽtibus circulos ſunt omnes ſimiles, ideoque in ratione ad inuicem ſicut circuli ipſi, vel ſicut rectangula quæ fiunt ex baſibus & altitudinibus ipſorum.



Triangula vero quæ ſunt latera Pyramidis circumſcribentis Conum, quæ etiam ſunt numero paria reliquis quæ in circulis fiunt, habent eaſdem baſes quas habent triangula figuræ circumſcribentis baſim Coni, altitudines vero æquales perpendicularibus quæ a vertice D Coni, ad baſes ducuntur; quare triangulum cuius perpendiculum eſt medium Arithmeticum inter omnia perpendicula, eſt medium Arithmeticum inter omnia triangula in ſuperficie Pyramidis quæ circumſcribit Conum. Sed Radius M eſt medius Arithmeticus inter omnes perpendiculares ductas a vertice D ad baſes triangulorum, quæ ſunt tangentes ad baſim Coni; Igitur omnia Triangula in ſuperficie Pyramidis (hoc eſt Superficies Pyramidis) ſe habent ad omnia trian-

gula

gula baſis, (hoc eſt ad figuram Polygoniam, quæ baſis eſt ipſius) ſicut linea M ad rectam A E, quæ radius eſt baſis Coni. Sicut autem ſe habet linea M ad A E radium baſis Coni, ita ſe habet figura Polygonia circumſcripta circulo cuius radius N, ad figuram circumſcriptam baſi Coni: Quare figura polygonia circumſcripta Circulo ex radio N, æqualis eſt ſuperficiei Pyramidis circumſcribentis Conum Scalenum ADB.

Si igitur, ſecundum methodum Archimedis, Circulo ex radio N circumſcribatur Figura polygonia ex æqualibus conſiſtens angulis & lateribus, & ei altera inſcribatur ſimilis, ita vt circumſcripta excedat inſcriptam, minore quantitate, quam eſt exceſſus quo Circulus ex radio N ſuperat ſuperficiem Conicam Coni ſcaleni; (ſuppoſito quòd maior ſit Circulus conicâ ſuperficie;) & ſi circa baſim Coni ſimilis circumſcribatur figura, pro baſi Pyramidis circumſcribentis Conum; oſtendetur quod circulus ex radio N non poſſit eſſe maior Conicâ ſuperficie. Et ſimili prorſus methodo demonſtrabitur quòd neque minor eſſe poteſt. Quare neceſſarium eſt vt ſint æquales.

Methodum autem demonſtrationis quoniam admodum longam, & omnibus ſatis notam, meliùs mihi viſum eſt non apponere; ſed magis vt apud authorem Archimedem libro primo de Sphęrâ & Cylindro quæratur.

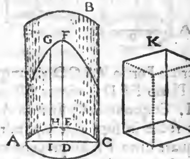
Media autem Arithmetica, inter omnes Perpendiculares a vertice Coni A D B ad omnes tangentes baſis ipſius, ſic quæratur. Quoniam enim Media inter A D & D B, non eſt media quæſita, propterea

quòd talis Conus conſtitui poſſit, vt linea DB foret maior quam media Arithmetica inter omnes perpendiculares ad tangentes baſis, (quod intuenti facile apparebit) multò minùs poteſt media inter AD & DB eſſe media quæſita. Oportet igitur vt quæratur media Arithmetica inter aggregatum ex AD & DB & duplum lateris Coni recti ſuper eâdem baſi & in eâdem altitudine conſtituti. Maximum enim aggregatum omnium binarum perpendicularium eſt ex AD & DB; Minimum vero eſt duplum lateris Coni recti, ex eâdem baſi & altitudine ſicut antea demonſtratum eſt. Dimidium igitur illius medij Arithmetici inter aggregatum ex AD & DB, & duplum lateris Coni recti, eſt Medium Arithmeticum quæſitum; quod infinitis exemplis in numeris cõprobabitur. Supponatur enim quòd AD & DB ſint ſicut 6. & 4. & quòd minimæ perpendicularium; ſcilicet latera Coni recti ſint 3 & 3. aggregatum igitur omnium eſt 16. quod diuiſum per numerum terminorum 4. facit 4. pro Medio Arithmetico inter omnes numeros. Hanc inuentionem Medij Arithmetici veram eſſe iudico, etiamſi Geometricè demonſtratam non affirmo; donec autem improbetur, & falſam eſſe demonſtretur ſemper veram eſſe exiſtimabo.

CVBATIO CVIVSDAM PARTIS CYLINDRI RECTI, Diſſectæ Plano per Centrum Baſis tranſeunte.

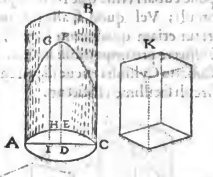
DE Geometricâ Cubatione Sphæræ vel Cylindri, Nemo quòd ſciam hactenus ſcripſit. De quadraturâ Circuli verò multi, etiam inter veteres, & vt ita dicam in ipſa Geometriæ infantiâ: quorum antiquiſſimus erat Hippocrates Chius, qui vixit circa annum quingenteſimum ante Chriſtum natum; poſt illum Antiphon & Bryſò, de quibus Ariſtoteles meminit, & falſa Hippocratis quadratura ſæpe ab illo in exemplum Parallogiſmi adducitur. Hic verò licet non quadrauerit rectè Circulum, quadrauit tamen Lunulam, & poſt illum vſque ad Vietam non extitit alius, qui vel aliquam aliam Circuli partem quadrauerit. Vieta tamen quadrauit plures Lunulas & Arbelum. Interim excogitata fuit a Dinoſtrato & Nicomede vt refert Pappus linea quadratrix, cuius ope datur recta æqualis circumferentiæ Circuli, a Geometris tamen reiecta, propterea quòd in baſe non detur ipſum punctum: veruntamen, hoc conceſſo, facilè demonſtrabitur Cuiuſuis Solidi rotundi Cubatio. Tandem mihi accidit quærenti cubationem Cylindri, Inuenire

partem eiuſdem, diſſectam plano per punctum aliquod in ſuperficie & centrum baſis, æquari cuidam Priſmati, cuius Baſis ſit ſubſeſquialtera triangulo maximo, quod fit per ſectionem eiuſdem Portionis, plano ad planum ſecans recto, altitudo vero æqualis diametro baſis Cylindri. Inueni etiam quòd diſſectâ iterum, ex alia parte Cylindri, portione ſimili, partem intermediam (quam Cuneum Cylindricum nomino) non poſſe cubari, ſine ope rectæ æqualis circumferentiæ circuli; Vel, quòd, ſi aliâ ratione cubari potuerit, daretur etiam quadratura Circuli, quod Problematicè efficere pro impoſſibili habeo: Theorematicè vero Cubatio Cylindri, ſicut illa Archimedis quadratura Circuli faciliimè efficietur.



Sit igitur Cylindrus rectus AB, cuius Baſis Circulus circa centrum D, a quo in baſi ducatur ad peripheriam recta DE; a puncto verò E in ſuperficie Cylindri ducatur recta, in quâ ſumpto quocunque puncto F, per illud & D centrum baſis, tranſeat Planum diſſecans partem Cylindri AFCD, cuius baſis AEC eſt ſe-

miçirculus; Planum AFC ex ſectione factum Semielli-pſis, reliqua verò Superficies eſt ipſius Cylindri. Concipiatur iam iſta Portio ſic diſſecta, iterum ſecari plano per punctum D, ad plana AFC & AEC recto, faciente triangulum FED: & fiat Priſma K ſuper baſi ſubſeſquialterâ trianguli FED, in altitudine verò æquali diametro AC. Dico Portionem iſtam AFCD, æquari Priſmati K.



Secetur iterum Portio AFCD vtcunque alio Plano, paralleſo Plano FED, faciente ſectionem Triangulum GHI. Et quoniam Cylindrus AB eſt rectus erunt omnes rectæ in ſuperficie Cylindri ad baſim eius erectæ, quare linea FE eſt perpendicularis ED, & GH, HI: Iterum cùm ſint duo plana FED, & GHI, parallela, ac etiam duo alia plana AFC, & AEC, quæ illa ſecent, communes eorum ſectiones, ſcilicet rectæ FD & GI, DE & IH, erunt inuicem parallelæ, ideoque continebunt inuicẽ angulos æquales. Quare triangula FED, & GHI, erunt ſimilia, & ſic per totum ſpacium Solidi AFCD, omnia trian-

gula

gulâ facta ex ſectionibus per plana parallela ſectioni F E D; erunt ad inuicem ſimilia. Cùm autem triangula ſimilia ſe habeant ad inuicem ſicut quadrata laterum homologorum, erit triangulum GHI ad triangulum F E D, ſicut quadratum H I ad quadratum E D; & ſic erit quoduis aliud triangulum ex ſectione parallelâ factum ad triangulum F E D, & ſumptis omnibus antecedentibus ad omnes conſequentes, erunt omnia triangula in Solido A F C, hoc eſt, ipſum Solidum A F C ad totidem triangula F E D, hoc eſt ad Priſma ex baſi triangulo F E D & altitudine A C, ſicut omnia quadrata rectarum in Semicirculo A E C ad diametrum A C applicatarum, ad totidem quadrata ſemidiametri E D. Sed ſicut omnia iſta quadrata ad totidem quadrata E D, ita omnes Circuli facti ex rectis illis pro radijs; ad totidem Circulos ex ſemidiametro E D: hoc eſt ſicut Sphæra ex radio E D ad Cylindrum ex eodem radio E D pro baſi & altitudine A C: Vel ſicut Sphæra ad Cylindrum eam circumſcribentem, id eſt, in ratione ſubſeſquialterâ. Quare Solidum A F C eſt ad Priſma ex baſi triangulo FED & altitudine rectæ A C in eadem ratione, ſcilicet ſubſeſquialterâ. Priſma autem K conſtituta eſt ſuper baſi ſubſeſquialterâ trianguli F E D, & in altitudine eiuſdem rectæ A C; Quare in ratione ſubſeſquialterâ ſe habet Priſma K ad tale Priſma ſuper baſi triangulo F E D & eiuſdem altitudinis A C; Ideoqne Priſma K & Pars Cylindri diſſecta notata literis A F C D ſunt æqualia, quod erat propoſitum.

Quod aſſumptum eſt, ſcilicet, quòd ratio omnium

qua-

quadratorum rectarum in circulo ordinatim applicatarum, ad totidem quadrata ſemidiametri, ſit ſicut Sphæra ad Cylindrum eam circumſcribentem deducitur ey Caualleriauâ doctrinâ Geometriæ indiuiſibilium, & demonſtrari poteſt ex primâ propoſitione libri tertij eiuſdem. Satis etiam manifeſtum eſt ex eo quòd circulus qui baſis eſt Cylindri æqualis & eiuſdem altitudinis cum ſphærâ, ſit ſubſeſquialter circuli qui baſis eſt Cylindri circumſcribentis Sphæram: oportet autem quòd circulus qui baſis eſt Cylindri æqualis ſphæræ, ſit medius Arithmeticus inter omnes circulos in Sphærâ ipſi parallelos, quoniã omnes circuli in ſphærâ æquales ſunt omnibus circulis in Cylindro ei æquali. Ideoque omnes circuli ipſius ad omnes circulos Cylindri circumſcribentis eam; ſicut baſis ad baſim, ſunt enim in eadem altitudine. Quare &c.

FINIS.

Digitized by Google

Errata ſic corrigito.

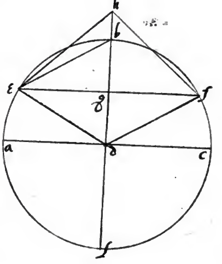
Pag.	linea.	
37	21	ſicut RB ad FB. *lege*, ſicut FB ad KB,
46	6	DE ad LM. *lege* DE ad LE.
74		In figurâ deſunt literæ F, & R, denotantes Truncum Coni IFRN.
96		Deſunt literæ L & M in figurâ deſignantes planum parallelum baſi.
113		Fit error figuræ: ponenda eſt hic figura prior paginæ 116
135		Deeſt in figura litera N, & linea a puncto H, includens rectangulum HN.
148	23	*lege* inſcribi poteſt propriè Sphæroides.
168	13	æquali *lege* æquale: & in figurâ deſunt literæ R & S. R ponenda inter A & E; S, verò loco G, & G notans Hemiſphærium EFG: deeſt etiam Q. inter N & L.
257	23	daleatur, in
263	16	*lege* ſicut LH ad FG.
274	26	ducta, *lege* ductarum.
284	15	ſecirculi. *lege* ſemicirculi.

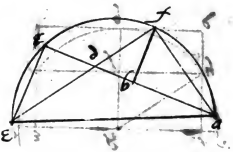
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google





f. 42

